
NHỮNG ĐÓNG GÓP MỚI CỦA LUẬN ÁN

- Kết hợp hệ số điều chỉnh cắt cải tiến đã phát triển với vị trí mặt trung hoà vật lý trên cơ sở lý thuyết FSDT để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM. Ngoài ra, luận án cũng đề cập đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, xét ảnh hưởng của nền đàn hồi thông qua lời giải Navier và PP PTHH.
- Đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để phân tích cho tấm với các điều kiện biên khác nhau theo phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3, NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM từ hàm biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3 và hàm biến dạng cắt bậc cao của luận án.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3 theo lý thuyết biến dạng Von-Karman để phân tích bài toán tĩnh của kết cấu tấm FGM và tấm composite nhiều lớp từ hàm biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3.
- Đánh giá hiệu ứng của các mô hình tính toán vật liệu cũng như các quy luật ứng xử hiện nay thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM.

CÁC KẾT QUẢ ĐÃ CÔNG BỐ

CHƯƠNG 2:

1. Van-Hau Nguyen, Trung-Kien Nguyen. Free vibration analysis of functionally graded plates based on physical neutral surface using first-order shear deformation theory. *Journal of Science and Technology*, 52 (2C), 92-102, 2014.
2. Nguyen Van Hau, Nguyen Trung Kien. Buckling analysis of functionally graded plates based on first-order shear deformation theory and physical neutral surface. *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ XI, TPHCM 7-9/11/2013*, 1, 446-454, 2013. ISBN: 978-604-913-212-2.
3. Nguyen Trung Kien, Nguyen Van Hau. A refined first-order shear deformation theory for analysis of functionally graded sandwich plates resting on elastic foundations. *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc*, 8/2015, Đà Nẵng. ISBN: 978-604-84-1272-2

CHƯƠNG 3:

4. Van-Hau Nguyen, Trung-Kien Nguyen, Huu-Tai Thai, Thuc P. Vo. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233-246, 2014 (SCI).
5. Nguyen Trung Kien, Vo Phuong Thuc, Thai Huu Tai, Nguyen Van Hau. A higher-order shear deformation theory for buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Proceeding of International Conference on Green Technology and Sustainable Development*, 30/10/2014 Ho Chi Minh City, 2, 222-229, 2014.
6. Nguyen Van Hau, Nguyen Trung Kien. A quasi-3D inverse trigonometric shear deformation theory for static analysis of functionally graded plates. *Hội nghị Cơ học vật rắn biến dạng toàn quốc*, 8/2015, Đà Nẵng. ISBN: 978-604-913-458-6
7. Nguyen Van Hau, Nguyễn Trung Kiên. A Ritz's method based solution for free vibration analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order shear deformation theory. *Hội nghị khoa học toàn quốc vật liệu composite*, 28-29/7/2016, Nha trang. ISBN: 978-604-82-2026-6.

CHƯƠNG 4:

8. Trung-Kien Nguyen, Van-Hau Nguyen, Thanh Chau-Dinh, Thuc P. Vo, Xuan-Hung Nguyen. Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Composites Part B: Engineering*, 107, 162-173, 2016 (SCI).

MỞ ĐẦU

Khái niệm vật liệu phân lớp chức năng (*Functionally Graded Material (FGM)*) xuất hiện lần đầu tiên vào giữa thập niên 1980 tại Nhật Bản bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu, do tính ưu việt của nó thông qua sự làm việc của kết cấu dạng dầm, tấm hay vỏ khi chịu tải trọng cơ học, nhiệt độ, độ ẩm... hay trong các điều kiện làm việc bất lợi khác thì loại vật liệu này thường có những ưu điểm nổi bật. Ví dụ: hệ thống đẩy phản lực của động cơ tên lửa khi một mặt phải tiếp xúc với nhiệt độ rất cao trong khi mặt còn lại chỉ chịu tác động bởi các tải trọng thông thường, hay lớp vỏ tàu ngầm khi mặt ngoài phải chịu áp lực thuỷ tĩnh và môi trường bất lợi của nước biển trong khi mặt bên trong chỉ cần đáp ứng các yêu cầu cơ học cơ bản... Vì vậy, việc đào sâu nghiên cứu đối tượng này là yêu cầu cấp thiết hiện nay. Có nhiều cách để tiếp cận đối tượng nghiên cứu này.

- Có thể bằng các thí nghiệm vật liệu để xác định các đặc trưng vật liệu của chúng hay bằng các thí nghiệm kết cấu dạng tấm hay dầm để biết các nguyên lý ứng xử của kết cấu.
- Bằng các mô hình mô phỏng vật liệu hay kết cấu để rút ra được các nguyên tắc ứng xử chung.
- Bằng các mô hình tính toán lý thuyết thuần túy thông qua phân tích sự làm việc của các kết cấu cụ thể để từ đó có được cái nhìn tổng quát nhất...

Mỗi cách tiếp cận ở trên đều có những ưu điểm nhất định, cách tiếp cận đầu tiên thường mang lại hiệu quả cao nhưng đòi hỏi chi phí đầu tư lớn, nhất là trong điều kiện ở Việt Nam thì một số thí nghiệm sẽ không thực hiện được. Cách tiếp cận thứ hai khá trực quan, kết quả chính xác cao nhưng khối lượng tính toán rất lớn nên đòi hỏi phải có công cụ tính toán đủ mạnh mới đáp ứng các yêu cầu đặt ra. Cách tiếp cận thứ ba là đơn giản nhất nhưng vẫn đáp ứng được các mục tiêu đề ra và đây là cách tiếp cận phổ biến hiện nay được rất nhiều Nhà khoa học trên thế giới quan tâm. Luận án sẽ chọn cách tiếp cận thứ ba để phân tích cho đối tượng nghiên cứu thông qua bài toán tấm.

Trong luận án này sẽ tiến hành phân tích cụ thể cho nhiều loại tấm khác nhau: tấm FGM, tấm composite FGM và tấm composite hướng sợi nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau trên nền đàn hồi chịu tác dụng bởi tải trọng cơ học và nhiệt độ dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, bậc cao và tiếp cận 3 chiều, có xét đến bài toán tuyến tính và phi tuyến cho quan hệ giữa các thành phần chuyển vị và biến dạng, ứng dụng phương pháp làm giảm số ẩn số của trường chuyển vị, xác định chính xác vị trí mặt trung hoà vật lý cho tấm không đồng nhất, thiết lập phương trình năng lượng theo nguyên lý biến phân Hamilton, phương trình Lagrange, thiết

lập các phương trình chủ đạo của bài toán, sử dụng phương pháp giải tích (lời giải Navier và Ritz) và phương pháp số (phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH)) để giải hệ phương trình chủ đạo. Trong đó, PP PTHH sử dụng biện pháp khử khoá cứng, kết hợp với các phương pháp làm trơn để tăng mức độ chính xác của lời giải, các ví dụ số để phân tích các bài toán tĩnh học, bài toán lực tới hạn và bài toán phân tích tần số dao động riêng của kết cấu tấm. Đồng thời, luận án cũng khảo sát ảnh hưởng của quy luật phân phối vật liệu, kích thước tấm, hiệu ứng nền, cấu trúc các phân lớp cũng như tiến hành phân tích hiệu ứng các phương pháp đồng nhất đến ứng xử của tấm phân lớp chức năng.

CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN

1.1 Đặt vấn đề

Hiện nay, trong lĩnh vực cơ học vật rắn người ta luôn tìm cách phát triển những loại vật liệu có nhiều tính năng ưu việt như: khả năng chịu lực cao, tính dẻo, mức độ chống chịu nhiệt độ... cũng như tính ứng dụng rộng rãi và mang lại nhiều hiệu quả kinh tế. Vật liệu phân lớp chức năng (FGM) đáp ứng hầu hết các yêu cầu trên. FGM là loại vật liệu composite đặc biệt có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục nhằm cải thiện và tối ưu khả năng chịu tải trọng cơ, nhiệt của kết cấu theo yêu cầu mong muốn. Để việc ứng dụng loại vật liệu này được rộng rãi, nhất là trong các lĩnh vực: xây dựng, cơ khí, năng lượng, hàng không, vũ trụ... cần thiết phải tiến hành phân tích và đào sâu nghiên cứu về ứng xử của vật liệu thông qua các mô hình lý thuyết thuần túy, các mô hình mô phỏng và các mô hình thí nghiệm thực tế.

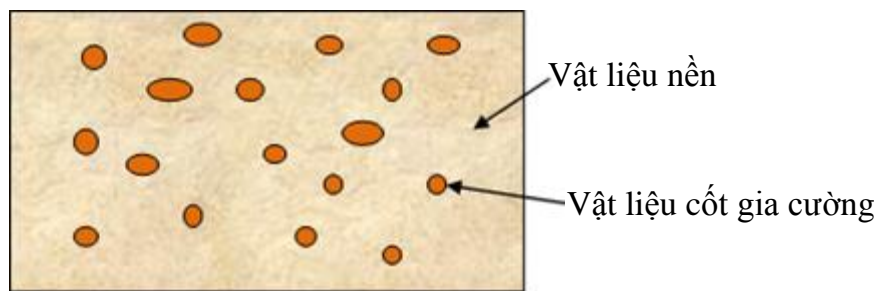
Bài toán phân tích ứng xử kết cấu dạng dầm, tấm hay vỏ khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ được ứng dụng nhiều trong lĩnh vực cơ kỹ thuật. Ví dụ: phân tích kết cấu cầu, đường ray, cống ngầm trong ngành giao thông; phân tích kết cấu sàn, dầm, vách trong ngành xây dựng; phân tích chi tiết động cơ đốt trong, hệ thống phản lực đẩy trong lĩnh vực cơ khí, hàng không, vũ trụ... Có rất nhiều Nhà nghiên cứu (trong và ngoài nước) quan tâm đến chủ đề này, tuy nhiên vẫn còn nhiều điều cần được phân tích và phát triển nhiều hơn nữa. Chẳng hạn, khi phân tích ứng xử của kết cấu tấm người ta thường áp dụng một số lý thuyết tính toán: lý thuyết cổ điển (CPT) bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) có kể đến thành phần biến dạng cắt nhưng cần có hệ số hiệu chỉnh cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) không cần hệ số hiệu chỉnh cắt nhưng cần phải chọn một cách hợp lý hàm biến dạng cắt, lý thuyết tiếp cận ba chiều (Quasi-3D) là lý thuyết HSDT nhưng có xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm. Bên cạnh đó, việc áp dụng các phương pháp tính toán cho kết cấu tấm cũng rất quan trọng, phổ biến hiện nay đó là: phương pháp giải tích và phương pháp số để phân tích ứng xử tĩnh và cả ứng xử động cho các loại kết cấu tấm với mức độ phân bố vật liệu khác nhau (tuyến tính, phi tuyến), tấm nhiều lớp... Tuy nhiên, tính hiệu quả và mức độ chính xác của lời giải cần phải được nghiên cứu sâu hơn, đó là: Phát triển hệ số điều chỉnh cắt cải tiến trong đó kể đến mặt trung hòa vật lý cho lý thuyết FSDT để phân tích cho tấm FGM; Phát triển một hàm biến dạng cắt bậc cao mới có nhiều ưu điểm cho lý thuyết HSDT và Quasi-3D để phân tích ứng xử của tấm FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ; Phát triển mô hình phần tử hữu hạn làm trơn khử khóa cắt với độ chính xác cao để phân tích ứng xử tấm FGM khi áp dụng phương pháp số; Phát triển mô hình phần tử hữu hạn làm trơn cho phân tích phi tuyến hình học tấm FGM và tấm

composite nhiều lớp; Phân tích hiệu ứng phương pháp đồng nhất hóa vật liệu đến ứng xử tấm FGM.

1.2 Tổng quan

1.2.1 Vật liệu composite

Vật liệu composite là một loại vật liệu được tổ hợp từ hai hay nhiều loại vật liệu khác nhau trong đó bao gồm vật liệu nền và cốt gia cường, tạo nên một loại vật liệu mới có tính năng ưu việt hơn so với từng thành phần vật liệu riêng lẻ. Vật liệu nền có vai trò định vị và giữ ổn định cấu trúc của chúng thường được cấu tạo từ polyme, kim loại, hợp kim, gốm, vữa xi măng,... Vật liệu cốt gia cường được cấu tạo từ các sợi thủy tinh, sợi polyme, sợi gốm, sợi kim loại, sợi cacbon... hoặc là các loại hạt như kim loại và phi kim... **Hình 1.1** thể hiện minh họa về vật liệu composite.

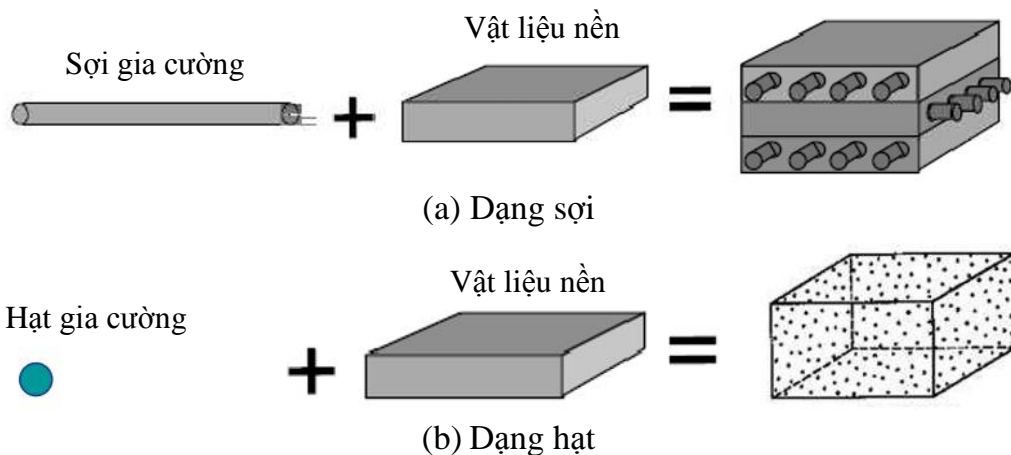


Hình 1.1: Minh họa về vật liệu composite

<http://www.kieugiacomposite.com/vatlieucompositevacacungdung.html>

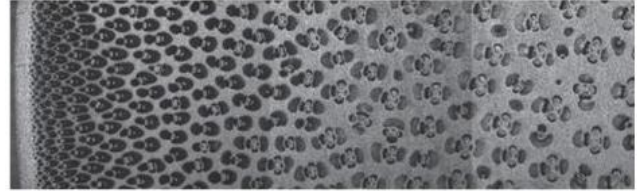
Phân loại vật liệu composite:

- Phân loại theo cấu tạo: Vật liệu composite được cấu tạo từ các sợi hay hạt gia cường và vật liệu nền (**Hình 1.2**)



Hình 1.2: Vật liệu composite từ nhiều phần tử [1]

- Phân loại theo bản chất, thành phần: Vật liệu composite có thể được hình thành từ vật liệu nền hữu cơ, vô cơ và khoáng vật. **Hình 1.3** thể hiện composite nền hữu cơ.



Hình 1.3: Composite nền hữu cơ trong tự nhiên: cây tre và cấu trúc vi mô vật liệu trên mặt cắt ngang

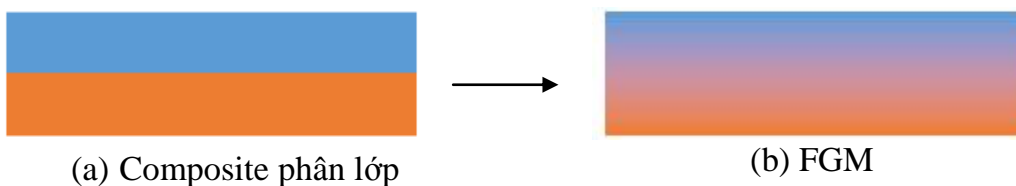
<http://rsos.royalsocietypublishing.org/content/4/1/160412>

Việc khai thác tính hiệu quả của các loại composite tự nhiên đã nhường chỗ cho việc sử dụng các loại composite nhân tạo tiên tiến bằng cách kết hợp các hợp chất polyme, hợp kim, kính, gốm, sứ... để tạo ra composite có cấu trúc nhiều lớp mỏng liên kết với nhau, tuy nhiên nhược điểm của loại vật liệu này là tính không liên tục về đặc tính vật liệu, điều này dẫn đến vấn đề tập trung ứng suất tại các phân lớp khi tiến hành phân tích ứng xử của kết cấu, đặc biệt là khi xét yếu tố nhiệt độ thì sự bất lợi này càng thể hiện rõ ràng hơn. Đây là vấn đề được nhiều nhà khoa học quan tâm.

1.2. 2 Vật liệu phân lớp chức năng

1.2.2.1 Khái niệm

Vấn đề tập trung ứng suất sẽ được giảm thiểu đáng kể nếu sự thay đổi các đặc tính từ vật liệu này đến vật liệu khác tại các phân lớp diễn ra từ từ. Nguyên tắc này là cơ sở để hình thành và phát triển phần lớn các vật liệu phân lớp chức năng. Vật liệu phân lớp chức năng (FGM) là một loại composite đặc biệt có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục nhằm cải thiện và tối ưu khả năng chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ của kết cấu. Điều này có được từ việc chế tạo loại vật liệu có sự thay đổi dần dần (quy luật gradient) của cấu trúc vật liệu nhằm tối ưu sự làm việc của từng loại vật liệu (**Hình 1.4**).



Hình 1.4: Vật liệu composite phân lớp và phân lớp chức năng FGM

Khái niệm vật liệu FGM xuất hiện lần đầu tiên vào giữa thập niên 1980 tại Nhật Bản bởi một nhóm các nhà khoa học vật liệu, những người đã tạo ra một loại vật liệu mới chống lại những ảnh hưởng của nhiệt trong ngành hàng không. Vật liệu mới này có khả năng chịu được môi trường nhiệt độ cao và loại bỏ được hiện tượng tập trung ứng suất tại vị trí tiếp xúc giữa các lớp vật liệu khác nhau. Nghiên cứu đó tập trung lên những kết cấu có một mặt trong môi trường lạnh và mặt còn lại trong

môi trường nhiệt độ rất cao. Vật liệu gốm được chọn cho mặt nóng với nhiệt độ lên đến 2000K trong môi trường oxy hóa, và mặt lạnh với nhiệt độ 1000K thì vật liệu có tính năng dẫn nhiệt, bền, dẻo như kim loại được chọn. Ngoài Nhật Bản, số lượng nghiên cứu trên vật liệu FGM tăng lên nhanh chóng và trở thành chủ đề được ưa thích trong nghiên cứu về vật liệu trong những năm sau đó bao gồm các nước như: Đức, Thụy Sĩ, Mỹ, Trung Quốc, Nga...

Vật liệu FGM là hỗn hợp của nhiều loại vật liệu, phổ biến thường gồm hai thành phần là gốm (ceramic) và kim loại (metal) với các đặc trưng cơ học như **Bảng 1.1**.

Bảng 1.1: So sánh đặc tính của gốm và kim loại [1]

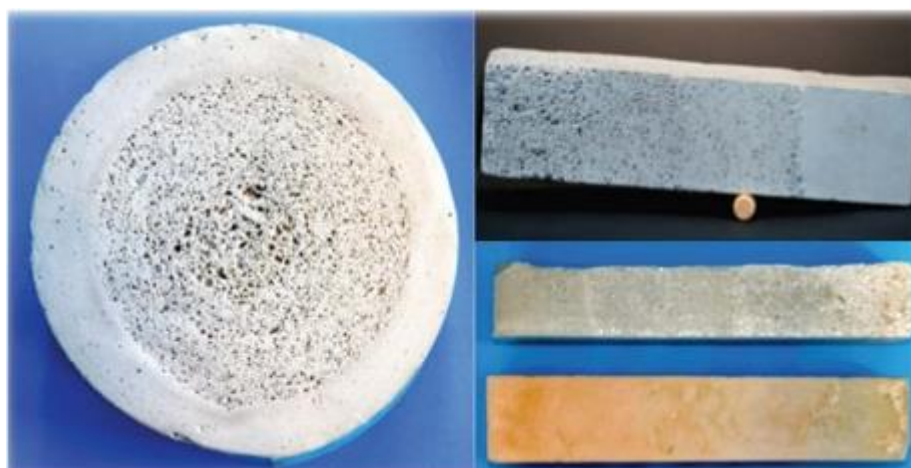
Vị trí	Vật liệu	Tính năng
Vùng chịu nhiệt cao	Gốm	- Chịu nhiệt cao - Chống oxy hóa cao - Dẫn nhiệt thấp
Các lớp bên trong	Gốm – kim loại	- Loại bỏ những vấn đề bề mặt tiếp xúc giữa các vật liệu
Vùng chịu nhiệt thấp	Kim loại	- Tính năng chịu lực cao - Hệ số dẫn nhiệt cao - Độ dẻo dai cao

1.2.2.2 Ứng dụng

Vật liệu FGM được ứng dụng nhiều trong môi trường có sự làm việc khắc nghiệt như lá chắn nhiệt của tàu vũ trụ, thiết bị đẩy phản lực, vỏ lò tinh luyện các loại xỉ, quặng khai khoáng, các bộ phận động cơ, thiết bị tiếp xúc với nguồn điện công suất lớn... Ví dụ như trong các lớp cách nhiệt truyền thống của các thiết bị chịu nhiệt cao, một lớp vật liệu ceramic sẽ được tráng lên các kết cấu kim loại, tuy nhiên sự thay đổi đột ngột tại vị trí tiếp xúc giữa 2 vật liệu khác nhau sẽ gây ra sự tập trung lớn ứng suất, dẫn đến hình thành biến dạng dẻo hoặc nứt. Những ảnh hưởng tiêu cực đó có thể được giảm nhẹ bằng cách sắp xếp vật liệu thay đổi liên tục theo các vật liệu thành phần, tại những vị trí cần chịu nhiệt và ăn mòn cao thì hàm lượng ceramic cao, ngược lại kim loại được tập trung tại những vị trí cần các tính năng cơ học có tính dẻo dai... **Hình 1.5** và **1.6** là ứng dụng của vật liệu FGM trong ngành vũ trụ và xây dựng.



Hình 1.5: Ứng dụng FGM trong hệ thống đẩy phản lực
http://www.nasa.gov/vision/earth/technologies/13apr_gradient.html.jpg

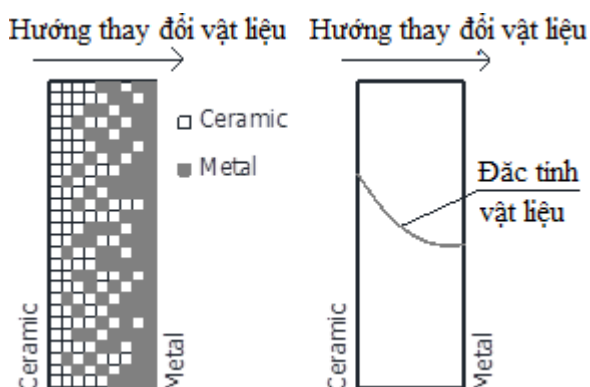


Hình 1.6: Ứng dụng FGM trong xây dựng

http://www.slideshare.net/sirris_be/2013-1205sirrismaterialsworkshopfgmmagien

1.2.3 Đặc tính đàn hồi hữu hiệu của vật liệu FGM

Như đã giới thiệu, FGM là loại vật liệu có các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục theo yêu cầu mong muốn nhưng nếu xét trên bình diện cấu trúc vi mô thì các hạt vật liệu vẫn phân bố một cách không đồng nhất. Chính vì vậy, để phân tích ứng xử vật liệu FGM một cách hiệu quả, nhất thiết phải tiến hành đơn giản hoá các cấu trúc vi mô phức tạp bằng cách áp dụng phương pháp đồng nhất hoá. Đây là phương pháp ước lượng các đặc tính hữu hiệu của vật liệu FGM. Có hai cách tiếp cận đánh giá các đặc tính hữu hiệu của vật liệu FGM: mô hình rời rạc và mô hình liên tục (**Hình 1.7**). Mô hình rời rạc kể đến các vi cấu trúc bằng cách giả thiết mô hình vật liệu lý tưởng theo các ô thể tích đơn vị sau đó tiến hành các phương pháp tính toán trên ô thể tích này, còn đối với mô hình liên tục thì giả thiết đặc tính vật liệu thay đổi liên tục theo hướng và không xét ảnh hưởng của cấu trúc vi mô, sau đó các đặc tính hữu hiệu xác định bằng các mô hình cơ học vi mô khác nhau. Luận án sẽ dựa vào mô hình liên tục để xác định các đặc tính hữu hiệu của vật liệu FGM.

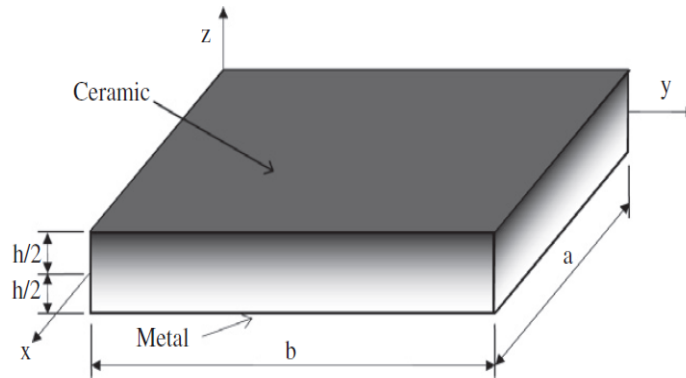


Hình 1.7: Mô hình rời rạc và mô hình liên tục [1]

Mô hình vật liệu FGM: Theo mô hình liên tục thì các đặc trưng hữu hiệu của vật liệu được xác định thông qua các hàm mật độ thể tích, phần lớn các nghiên cứu hiện nay thường diễn tả hàm mật độ thể tích có dạng hàm số lũy thừa hệ số mũ p (power-

law function), quy luật hàm S (Sigmoid function) hay quy luật hàm số mũ (exponential function). Các quy luật này sẽ được xem xét trong luận án.

Đối tượng nghiên cứu: Trong phạm vi luận án này, đối tượng nghiên cứu là kết cấu tấm trong đó giả thiết rằng tấm FGM dạng hình chữ nhật có cạnh dài a , cạnh ngắn b , chiều dày tấm h (**Hình 1.8**) là hỗn hợp của gốm (ceramic với mô đun Young E_c , khối lượng riêng ρ_c , hệ số Poisson ν_c) và kim loại (metal với mô đun Young E_m , khối lượng riêng ρ_m , hệ số Poisson ν_m). Các mô đun đàn hồi hữu hiệu của tấm FGM như: mô đun E , khối lượng riêng ρ , mô đun cắt G ... thay đổi liên tục theo chiều dày của tấm và phụ thuộc vào hàm mật độ thể tích của chúng.



Hình 1.8: Hình dạng tấm FGM

1.2.3.1 Đặc trưng hữu hiệu theo quy luật lũy thừa hệ số mũ p (power-law)

Một số mô hình xác định thành phần mô đun đàn hồi Young (E) và hệ số Poisson (ν) theo quy luật hàm lũy thừa hệ số mũ p [2]:

- Mô hình Voigt ([3], [4], [5]):

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m V(z) + E_c (1 - V(z)) \\ \nu(z) &= \nu_m V(z) + \nu_c (1 - V(z)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

- Mô hình Reuss ([3], [4], [5]):

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{E_m E_c}{E_m (1 - V(z)) + E_c V(z)} \\ \nu(z) &= \frac{E_m E_c}{\nu_m (1 - V(z)) + \nu_c V(z)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

- Mô hình Hashin-Shtrikman ([6], [7]):

$$E(z) = \frac{9G(z)K(z)}{G(z) + 3K(z)}, \quad \nu(z) = \frac{3K(z) - 2G(z)}{2(G(z) + 3K(z))} \quad (1.3)$$

trong đó $G(z)$, $K(z)$ xác định theo nguyên lý cận trên và cận dưới:

- Cận dưới:

$$G^-(z) = G_c + \frac{V(z)}{\left\{ \frac{1}{G_m - G_c} + \frac{6(K_c + 2G_c)(1 - V(z))}{5G_c(3K_c + 4G_c)} \right\}}$$

$$K^-(z) = K_c + \frac{V(z)}{\left\{ \frac{1}{K_m - K_c} + \frac{3(1 - V(z))}{(3K_c + 4G_c)} \right\}}$$
(1.4a)

- Cận trên:

$$G^+(z) = G_m + \frac{(1 - V(z))}{\left\{ \frac{1}{G_c - G_m} + \frac{6(K_m + 2G_m)V(z)}{5G_m(3K_m + 4G_m)} \right\}}$$

$$K^+(z) = K_m + \frac{(1 - V(z))}{\left\{ \frac{1}{K_c - K_m} + \frac{3V(z)}{(3K_m + 4G_m)} \right\}}$$
(1.4b)

• Mô hình Tamura ([8], [9]):

$$E(z) = \frac{(1 - V(z))E_c(q_T - E_m) + V(z)E_m(q_T - E_c)}{(1 - V(z))(q_T - E_m) + V(z)(q_T - E_c)}$$

$$v(z) = v_m V(z) + v_c (1 - V(z))$$
(1.5)

với q_T “stress-to-strain transfer” là tham số tính toán.

• Mô hình SCM (Self-Consistent Method) ([10], [11]):

$$V(z) = \frac{\frac{K_c}{K_c + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{5G_m}{G(z) - G_m} + 2}{\frac{K_c}{K_c + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{5G_m}{G(z) - G_m} - \frac{K_m}{K_m + \frac{4}{3}G(z)} - \frac{5G_c}{G(z) - G_c}}$$

$$K(z) = \frac{1}{\frac{V(z)}{K_m + \frac{4}{3}G(z)} + \frac{1 - V(z)}{K_c + \frac{4}{3}G(z)}} - \frac{4}{3}G(z)$$
(1.6)

• Mô hình LRVE được xây dựng bởi Gasik và Lilius ([12], [13]):

$$E(z) = E_c \left(1 + \frac{V(z)}{FE - \sqrt[3]{V(z)}} \right), \quad FE = \frac{1}{1 - E_c / E_m} \quad (1.7)$$

$$\nu(z) = \nu_m V(z) + \nu_c (1 - V(z))$$

So sánh các mô hình xác định các đặc tính hữu hiệu:

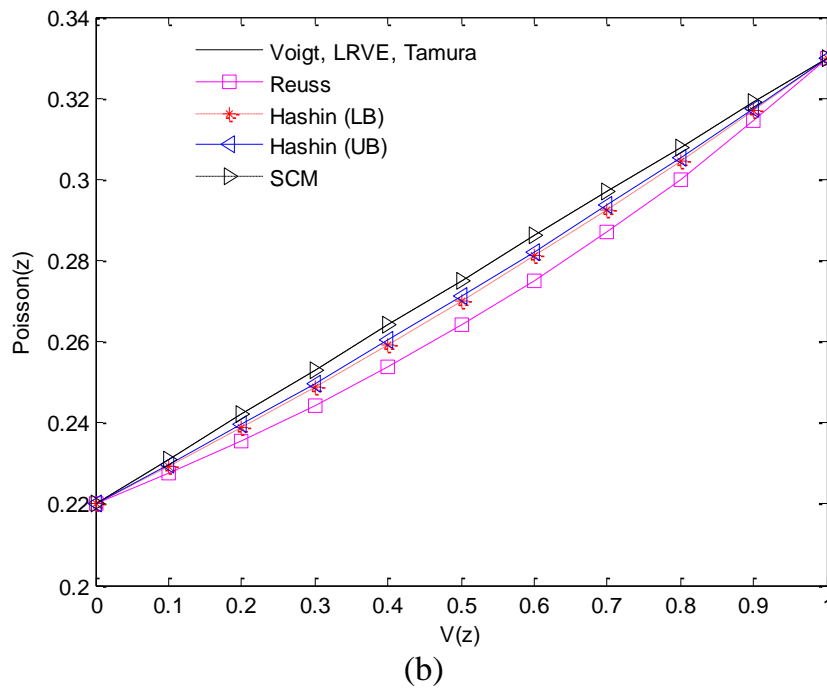
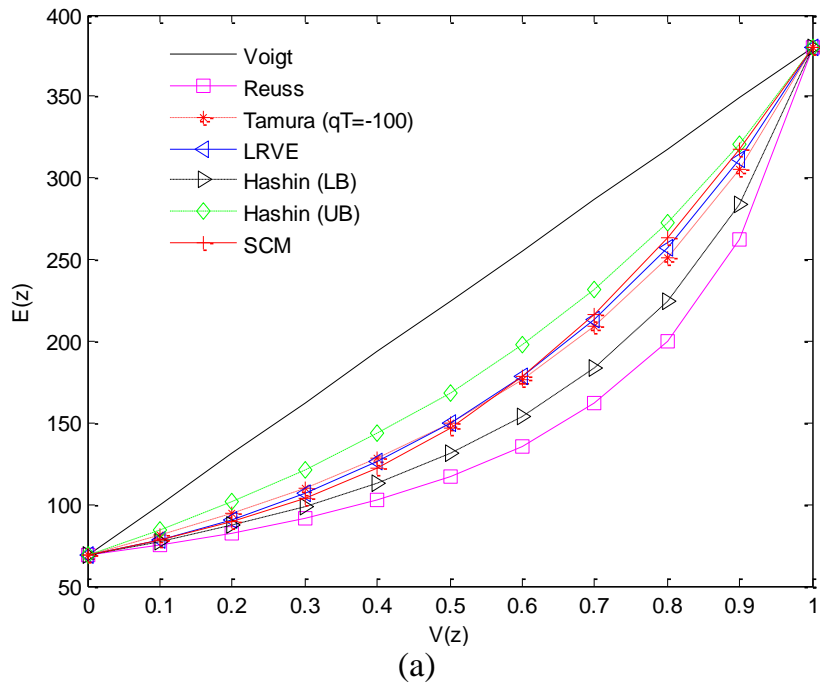
Xét tấm FGM như **Hình 1.8** được chế tạo từ vật liệu nhôm (Al) cho mặt dưới và mặt trên là vật liệu gốm (Al_2O_3) với tính chất vật liệu được thể hiện trong **Bảng 1.2**. Kết quả so sánh giá trị các thành phần E và ν được thể hiện trong **Hình 1.9**.

Bảng 1.2: Đặc tính vật liệu của kim loại (aluminum) và gốm (ceramic)

Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Aluminum alloy 1100	69	2710	0.33
Ceramic (Al_2O_3 99% pure)	380	3980	0.22

Hình 1.9a biểu diễn sự phân bố của mô đun Young E theo chiều dày tính toán theo các mô hình vi cấu trúc khác nhau. Có thể thấy rằng mô đun Young tính toán từ mô hình Voigt và Reuss lần lượt cho giá trị lớn nhất và bé nhất so với các mô hình còn lại. Cụ thể, nếu xét tại vị trí $V(z) = 0.5$ thì mức độ chênh lệch của hai kết quả là: 48%. Tương tự, xấp xỉ cận trên và cận dưới của Hashin-Shtrikman là: 22%. Các xấp xỉ của Tamura ($q_T = 100\text{GPa}$), LRVE và SCM có mức độ khác biệt là không đáng kể. Đặc biệt, mô hình của Tamura phụ thuộc rất nhiều vào thành phần q_T . Tương tự, trong **Hình 1.9b** khi xác định hệ số Poisson (ν) thì các mô hình có mức độ khác biệt không lớn. Vì vậy, khi phân tích ứng xử của vật liệu FGM thì cần phải lựa chọn mô hình tính toán sao cho phù hợp, nhất là khi xác định mô đun đàn hồi Young (E) đôi khi cần thiết phải tiến hành thực nghiệm để nhận định các mô hình phù hợp.

Bên cạnh đó, vật liệu FGM được chế tạo bằng các phương pháp: luyện bột kim loại, lắng đọng hơi, ly tâm và công nghệ in 3D. Hệ số đặc trưng vật liệu p được xác định thông qua tỉ lệ trộn giữa các thành phần vật liệu hoặc được tối ưu thông qua các bài toán xác định các thành phần nội lực (ứng suất), chuyển vị, tần số dao động và lực tối hạn...([14], [15], [16]). Tuy nhiên, trong thực tế để đạt được đúng như mô hình lý thuyết tính toán đề xuất thì yêu cầu công nghệ sản xuất đòi hỏi mức độ chính xác rất cao.



Hình 1.9: Ảnh hưởng của giá trị modun Young (E) và hệ số Poisson (ν) đối với hàm mật độ thể tích ($V(z)$) của tấm FGM

1.2.3.2 Hàm mật độ thể tích theo quy luật phân bố hàm S (Sigmoid)

Đặc trưng hữu hiệu của tấm phân bố hàm S [17] được xác định:

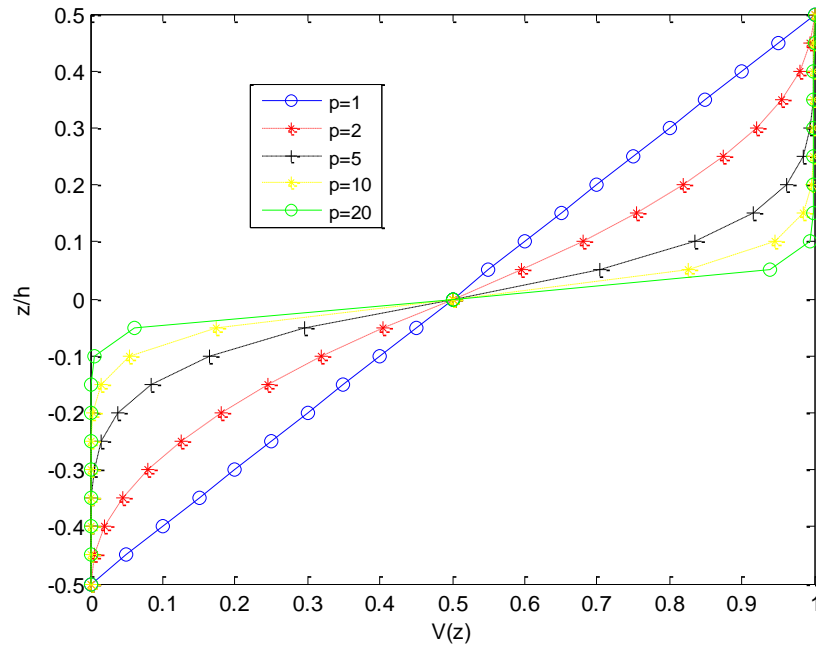
$$P(z) = (P_c - P_m)V_1(z) + P_m \text{ với } z \in \left[0, \frac{h}{2}\right] \quad (1.8)$$

$$P(z) = (P_c - P_m)V_2(z) + P_m \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, 0\right] \quad (1.9)$$

trong đó $V_1(z)$, $V_2(z)$ là các hàm mật độ thể tích (**Hình 1.10**):

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ với } z \in \left[0, \frac{h}{2}\right] \quad (1.10)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, 0\right] \quad (1.11)$$



Hình 1.10: Hàm $V(z)$ theo quy luật phân bố hàm S

Có thể thấy rằng sự phân bố vật liệu theo quy luật hàm S là dựa trên cơ sở hàm số mũ p bằng trên nửa chiều dày tấm.

1.2.3.3 Hàm mật độ thể tích có dạng hàm số mũ (exponential)

Đặc trưng hữu hiệu của tấm FGM theo quy luật hàm số mũ được xác định theo Delate và Erdogan [18]:

$$P(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (1.12)$$

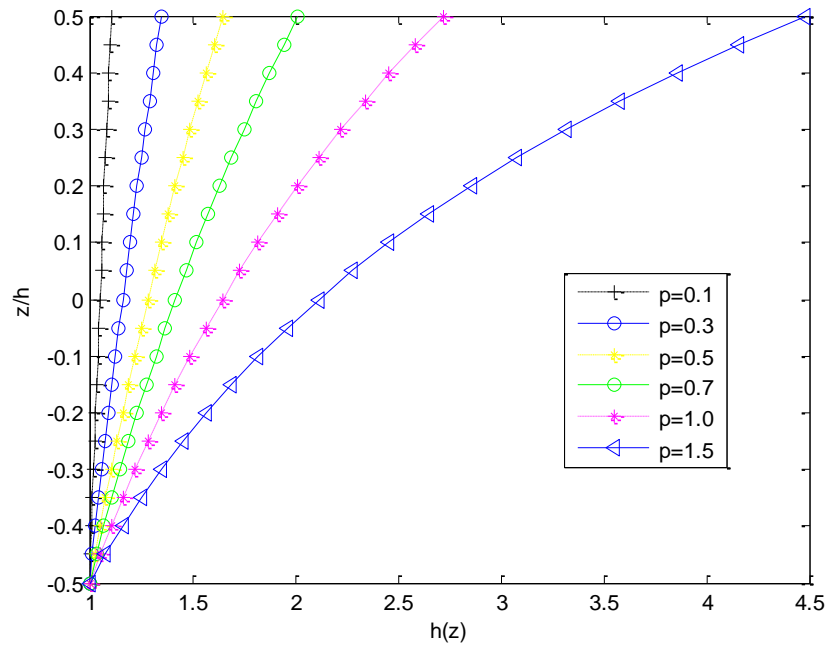
trong đó:

$$A = P_m; B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_c}{P_m} \right) \quad (1.13)$$

Dạng phân bố này cũng được đề cập trong nghiên cứu của Mantari và cộng sự [19] (**Hình 1.11**):

$$P(z) = P_m e^{p \left(\frac{z+1}{h} \right)} \quad (1.14)$$

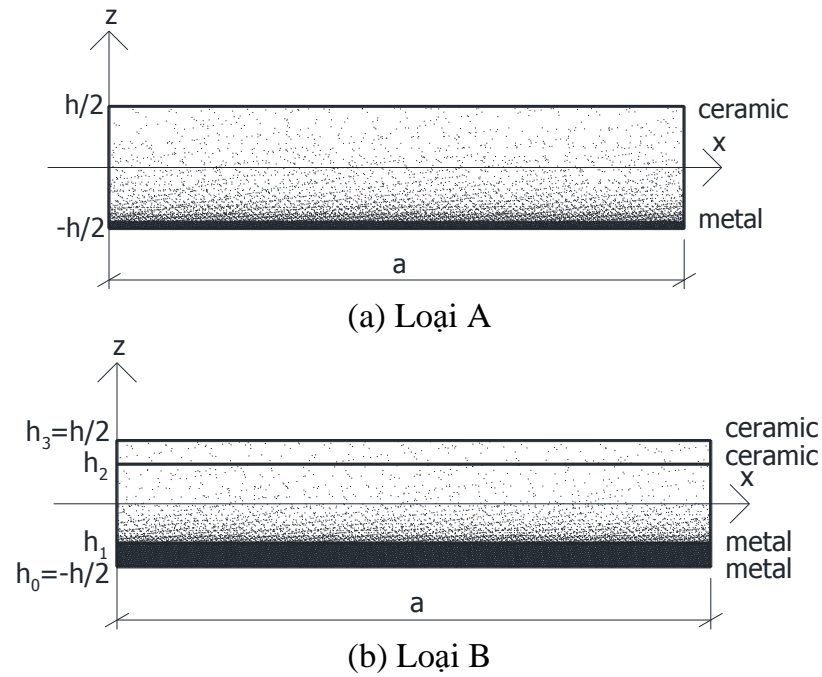
$$P_c = P_m e^p \quad (1.15)$$

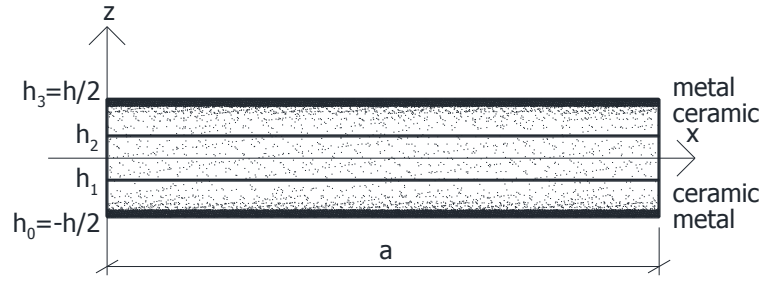


Hình 1.11: Hàm $V(z)$ theo quy luật phân bố hàm mũ

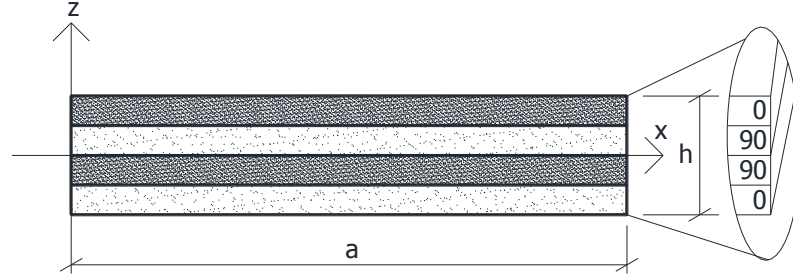
1.2.4 Kết cấu tấm FGM

Xét tấm FGM như **Hình 1.8** với cấu tạo mặt cắt ngang như **Hình 1.12** có các đặc trưng vật liệu: môđun Young (E), hệ số Poisson (ν) và khối lượng riêng (ρ) thay đổi liên tục theo chiều dày tấm. Bốn loại tấm được xét đến trong luận án (**Hình 1.13**).





(c) Loại C



(d) Loại D

Hình 1.12: Cấu tạo mặt cắt ngang của kết cấu tấm

- **Tấm loại A:** được hình thành từ vật liệu kim loại và gồm với hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) (**Hình 1.12a**):

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad (1.16)$$

trong đó p là hệ số đặc trưng vật liệu, h là chiều dày tấm.

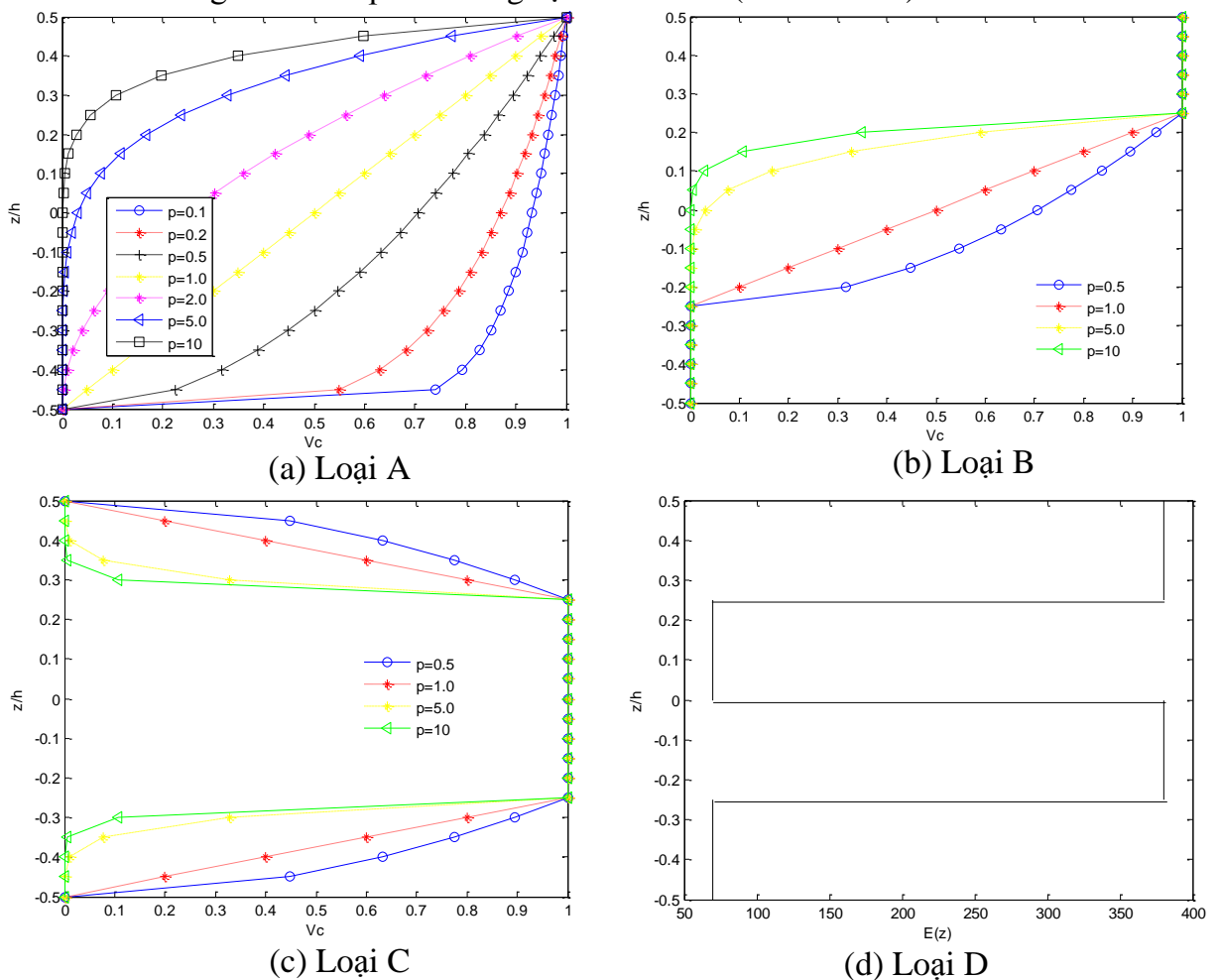
- **Tấm loại B:** là tấm composite với lớp trên là gốm, lớp dưới được chế tạo từ kim loại, và lõi giữa được làm từ kim loại và gốm (**Hình 1.12b**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (1.17)$$

- **Tấm loại C:** là tấm composite với lớp trên, lớp dưới được chế tạo từ gốm và kim loại, và lõi giữa được làm từ gốm (lõi cứng) hay kim loại (lõi mềm) (**Hình 1.12c**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (1.18)$$

- **Tấm loại D:** là tấm composite phân lớp được hình thành từ nhiều lớp khác nhau trong đó mỗi lớp có hướng sợi khác nhau (**Hình 1.12d**).



Hình 1.13: Sự phân bố vật liệu tấm composite FGM theo chiều dày tấm.

1.2.5 Lý thuyết tấm lớp đơn

Phần này sẽ trình bày các lý thuyết tấm lớp đơn sử dụng trong luận văn trong phân tích ứng xử tấm chức năng: lý thuyết tấm cổ điển, lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc nhất, lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao.

1.2.5.1 Lý thuyết tấm cổ điển

Mô hình tấm dựa trên lý thuyết tấm cổ điển (CPT) thỏa mãn các giả định của Love-Kirchhoff là đường thẳng vuông góc với mặt trung bình vẫn thẳng và vuông góc với mặt trung bình trước và sau khi biến dạng (**Hình 1.14**). Lý thuyết CPT đã bỏ qua ảnh hưởng của thành phần biến dạng cắt (tham khảo các nghiên cứu của Timoshenko và Woinowsky-Krieger [20], Reddy ([21], [22], [23])).

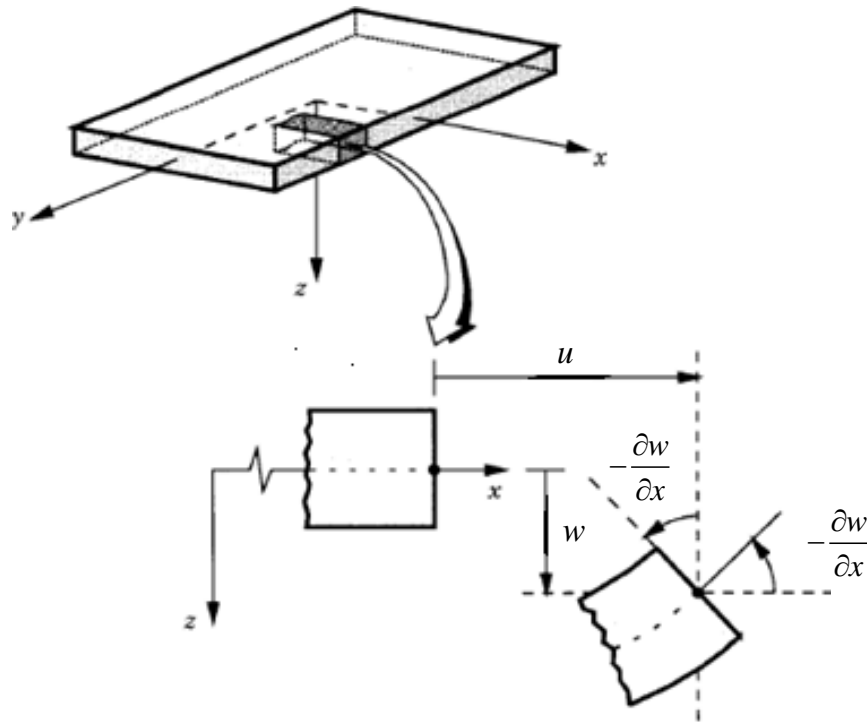
Do bỏ qua biến dạng cắt ngang nên lý thuyết này chỉ phù hợp cho bài toán tấm mỏng và không mang lại kết quả phù hợp cho các bài toán tấm dày. Tuy nhiên, do tính đơn giản là chỉ với ba thành phần chuyển vị độc lập nên đây là cách tiếp cận dễ dàng nhất. Lý thuyết này được He và cộng sự [24], Chi và Chung ([25], [26]),

Srinivas và Rao [27] dùng để phân tích ứng xử của tấm FGM và composite phân lớp.

Trường chuyển vị của lý thuyết tấm cổ điển:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.19)$$

trong đó u , v , w là các thành phần chuyển vị theo x , y , z tại vị trí mặt trung hoà.



Hình 1.14: Mô hình tấm theo lý thuyết cổ điển [21]

1.2.5.2 Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) là lý thuyết cải tiến từ lý thuyết CPT trong đó kể đến thành phần biến dạng cắt ngang trong tấm nên mặt biến dạng không còn vuông góc mặt trung bình của tấm (**Hình 1.15**). Tuy nhiên, theo lý thuyết này thì ứng suất cắt ngang là hằng số theo chiều dày của tấm, nên đòi hỏi cần phải có một hệ số điều chỉnh cắt để tính giá trị ứng suất cắt (Reddy [21]). Trong thực tế, do tính đơn giản nên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đã được quan tâm và sử dụng bởi rất nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới nhằm phân tích các ứng xử tĩnh, ổn định và dao động của kết cấu dầm và tấm FGM chịu các loại tải trọng cơ nhiệt khác nhau. Điển hình là nghiên cứu của Praveen và Reddy [28] đã phân tích tĩnh và dao động của tấm FGM dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn; Oatao và Tanigawa [29] phân tích ứng suất của tấm FGM trong môi trường

nhiệt không đều; Li và cộng sự [30] đã đưa ra lời giải chính xác để phân tích tấm FGM chịu tải trọng nhiệt độ; Batra và Jin [31] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất kết hợp với PP PTHH để nghiên cứu dao động tự do của tấm FGM hình chữ nhật. Bên cạnh đó, vấn đề hệ số hiệu chỉnh cắt cũng được quan tâm bởi Nguyen và cộng sự ([32], [33], [34], [35]) trong đó nhóm nghiên cứu đã đề xuất hệ số hiệu chỉnh cắt để phân tích ứng xử tấm FGM và tấm sandwich FGM. Một số nghiên cứu cho rằng, do vật liệu FGM là vật liệu không đồng nhất nên cần thiết phải xét đến vị trí mặt trung hòa vật lý. Điều này được nghiên cứu bởi Shingha và cộng sự [36] dùng PP PTHH có xét đến vị trí mặt trung hoà vật lý để phân tích tấm FGM dưới tác dụng của tải trọng ngang; Ma và Lee [37] sử dụng mặt trung hòa vật lý để phân tích ứng xử phi tuyến của dầm FGM khi chịu tải trọng do nhiệt; Zhang và cộng sự ([38], [39]) dùng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích tấm FGM dựa trên mặt trung hòa vật lý; Singha và cộng sự [40], Wu và cộng sự [41] đã sử dụng mặt trung hòa vật lý để phân tích dao động phi tuyến của tấm FGM dưới tác dụng của tải trọng khí động; Latifi và cộng sự [42] đã dùng chuỗi hàm Fourier mở rộng để phân tích ổn định cho tấm FGM với các điều kiện biên khác nhau; Srinivas và Prasad [43], Naderi và Saidi [44] đã mô hình tấm FGM dưới tác dụng của tải trọng cơ học có xét đến vị trí mặt trung hòa vật lý; Prakash và cộng sự [45], Lee và cộng sự [46] dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và vị trí mặt trung hòa vật lý để phân tích ứng xử của tấm FGM dưới tác dụng của tải trọng do nhiệt độ.

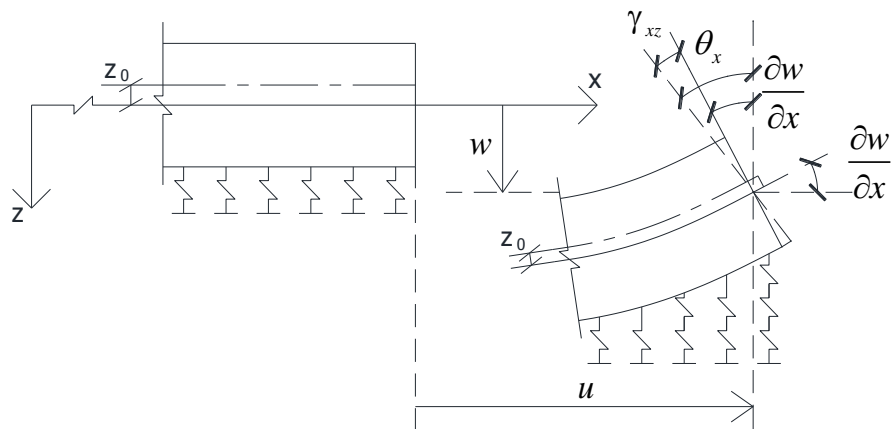
Nhìn chung, mỗi nhóm tác giả đã phát triển và đưa ra các mô hình tính toán dựa trên FSDT đều có những ưu nhược điểm nhất định, nhất là vấn đề hệ số điều chỉnh cắt trong việc tính toán ứng suất cắt của lý thuyết FSDT cần phải được phát triển thêm nữa. Không ngoài quỹ đạo trên, luận án sẽ kết hợp hệ số điều chỉnh cắt cải tiến trong đó vị trí mặt trung hòa vật lý được kể đến, đồng thời kết hợp hiệu ứng nền, lý thuyết tấm cải tiến 4 biến nhằm phân tích các đáp ứng chuyển vị, ứng suất, lực tới hạn và tần số dao động cho kết cấu tấm. Kết quả lời giải sẽ được kiểm chứng nhằm đánh giá tính phù hợp của lý thuyết phát triển.

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u(x, y) + (z - z_0)\theta_x(x, y) \\
 u_2(x, y, z) &= v(x, y) + (z - z_0)\theta_y(x, y) \\
 u_3(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

trong đó (u, v, w) là các thành phần chuyển vị tại mặt trung hoà; (θ_x, θ_y) lần lượt là góc xoay đối với trục y và x của tấm; z_0 là vị trí mặt trung hoà đối với mặt trung bình, được xác định:

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} zE(z)dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z)dz} \tag{1.21}$$



Hình 1.15: Mô hình tấm trên nền đàn hồi theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và vị trí mặt trung hòa vật lý

1.2.5.3 Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) là phần mở rộng của nhóm lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, ưu điểm của lý thuyết này là khắc phục nhược điểm của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, nghĩa là không cần sử dụng hệ số điều chỉnh cắt để tính toán các thành phần ứng suất cắt trong tấm do thành phần biến dạng cắt không phải là hằng số theo chiều dày tấm và mặt biến dạng là mặt cong theo chiều dày tấm (**Hình 1.16**). Tuy nhiên, tính chính xác cũng như mức độ hiệu quả của phương pháp phụ thuộc vào việc lựa chọn hàm dạng biến dạng cắt, một vài nghiên cứu gần đây đã đề xuất một số hàm biến dạng với mức độ chính xác khác nhau của lời giải, điển hình trong số đó là hàm biến dạng cắt bậc ba (TSDT) của Reddy ([47], [48], [49]), Zenkour và cộng sự ([50], [51], [52]), Shariat và Eslami [53], Dong và Li [54], Tran và cộng sự [55], Shi [56], Roque và cộng sự [57], Ghugal và Sayyad [58], Mechad và cộng sự [59], Kumar và cộng sự [60] đã phân tích khá đầy đủ việc ứng xử của tấm FGM và tấm composite nhiều lớp khi chịu tác dụng của tải trọng cơ học và nhiệt độ kể cả bài toán phi tuyến hình học. Bên cạnh đó, Soldatos [61], Kettaf và cộng sự [62], Akavci [63] đã dùng hàm biến dạng cắt dạng hàm hyperpolic (HDT) để phân tích các ứng xử của tấm FGM và tấm FGM trên nền đàn hồi chịu tải trọng nhiệt độ; Touratier [64], Thai và Vo [65] sử dụng hàm biến dạng cắt dạng hình sin (SSDT) để phân tích ứng xử kết cấu tấm; Karama [66] sử dụng hàm biến dạng cắt dạng hàm mũ (ESDT) để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động cho dầm FGM; Mantari và cộng sự ([67], [68]) đã kết hợp giữa hàm lượng giác và hàm mũ để xây dựng hàm biến dạng cắt mới từ đó phân tích các giá trị biến dạng và ứng suất trong tấm FGM. Ngoài ra, hàm biến dạng cắt cũng đã được phát triển bởi Xiang và Kang [69] dùng hàm biến dạng cắt dạng đa thức bậc n để phân tích các thành phần ứng suất và biến dạng trong tấm FGM; Thai và cộng sự [70] đã sử dụng hàm biến dạng cắt dạng hàm lượng giác nghịch đảo để phân tích tấm FGM và tấm sandwich nhiều lớp; Neeraj Grover và cộng sự [71] đã dùng hàm hyperpolic ngược để xây

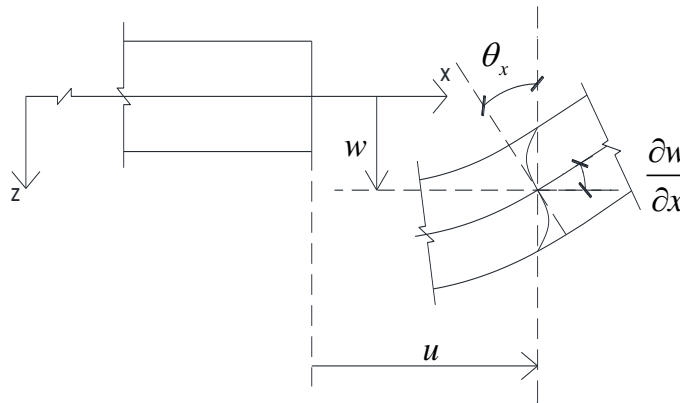
dựng hàm biến dạng cắt từ đó phân tích bài toán tĩnh, bài toán ổn định và bài toán dao động cho tấm FGM và sandwich nhiều lớp. Ngoài ra, Houari [72] dùng hàm biến dạng cắt bậc cao kết hợp với mặt trung hoà vật lý để phân tích ứng suất, biến dạng cho kết cấu tấm FGM.

Nhìn chung, các hàm biến dạng cắt bậc cao nói trên đã đóng góp đáng kể cho việc xây dựng và phát triển mô hình tính toán cho tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Tuy nhiên, để có được một hàm biến dạng cắt bậc cao phù hợp cho tất cả các mô hình ứng xử của tấm FGM của tất cả các dạng bài toán thì cần có nhiều hơn các nghiên cứu về chủ đề này. Chính vì vậy, luận án sẽ đề xuất một hàm biến dạng cắt mới có thể áp dụng được cho nhiều loại bài toán tấm với những ưu điểm nổi bật trong mục tiêu là xây dựng một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới, tổng quát, tiếp cận với mô hình làm việc thực tế của các loại tấm FGM khác nhau.

Trường chuyên vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.22)$$

trong đó $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$ là các thành phần chuyển vị thẳng, góc xoay và $f(z)$ là hàm biến dạng cắt bậc cao.



Hình 1.16: Mô hình tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

1.2.5.4 Lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận ba chiều

Lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận ba chiều (Quasi-3D) cũng được xây dựng và phát triển theo nhóm lý thuyết biến dạng cắt của tấm Reissner-Mindlin và lý thuyết tấm cô điển Love-Kirchhoff, cách tiếp cận của lý thuyết này là xây dựng trường chuyển vị có kể đến biến dạng theo chiều dày tấm (phương trục z). Điều này là phù hợp với sự làm việc thực tế của kết cấu, đặc biệt đối với tấm dày. Lý thuyết Quasi-3D được quan tâm bởi Carrera và cộng sự ([73]) trong đó hiệu ứng biến dạng theo chiều dày tấm và vỏ FGM được phân tích, các kết quả nghiên cứu cho thấy rằng hiệu ứng này có hiệu quả cho tấm và vỏ dày; Neves và cộng sự ([74], [75]) đã dựa vào lý thuyết

biến dạng cắt bậc cao với hàm biến dạng cắt dạng hyperbolic và hàm lượng giác để khảo sát bài toán phân tích tĩnh và dao động tự do của tấm nhiều lớp; Thai và cộng sự ([76], [77], [78]) đã dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với hàm dạng là hàm lượng giác để khảo sát bài toán tĩnh của tấm FGM. Ngoài ra, Mantari và Soares ([79], [80]) đã sử dụng hàm biến dạng cắt dạng hàm lượng giác có chứa tham số hiệu chỉnh để phân tích bài toán tĩnh cho tấm FGM với hàm mật độ thể tích dạng hàm lũy thừa và dạng hàm số mũ. Nhìn chung, hướng nghiên cứu về lý thuyết này hiện nay khá ít ỏi và đây là phần hoàn thiện của lý thuyết biến dạng cắt, vì đã kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm, phản ánh đúng với mô hình làm việc thực tế của tấm và rất phù hợp để phân tích bài toán tấm dày. Không ngoài quỹ đạo chung của luận án, phần này sẽ được xây dựng một mô hình lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận ba chiều với hàm biến dạng cắt bậc cao mới phù hợp với nhiều mô hình và áp dụng được cho nhiều loại bài toán tấm.

Trường chuyên vị của lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận 3 chiều:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} z + f(z) \theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} z + f(z) \theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) + g(z) \theta_z(x, y) \end{aligned} \quad (1.23)$$

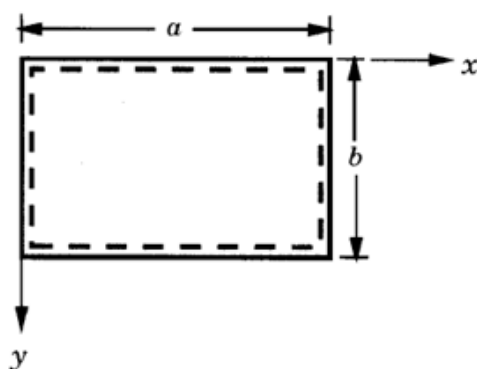
trong đó $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ là các thành phần chuyên vị và góc xoay, $f(z)$ là hàm biến dạng cắt bậc cao, và $g(z) = df / dz$.

1.2.6 Lời giải giải tích và phương pháp số phân tích ứng xử tấm FGM

1.2.6.1 Lời giải giải tích

1.2.6.1.1 Lời giải Navier

Lời giải Navier là một trong những lời giải đơn giản và hiệu quả trong các phương pháp giải tích vì áp dụng được với nhiều dạng bài toán khác nhau. Lời giải này đã được áp dụng trong việc giải quyết nhiều bài toán khác nhau trong cơ học như phân tích trạng thái ứng suất, biến dạng của các kết cấu trong các chi tiết cơ khí, máy báy, tàu thủy... cũng như các vấn đề truyền nhiệt, động lực học, và thu được những hiệu quả nhất định, đặc biệt với sự trợ giúp của máy tính thì phương pháp này càng phát huy tối đa vì có kết quả tiệm cận với lời giải chính xác [81].



Hình 1.17: Tấm hình chữ nhật với 4 biên tựa đơn [21]

Ý tưởng của lời giải là xấp xỉ trường chuyển vị, tải trọng, nhiệt độ... bằng các chuỗi hàm lượng giác kép thỏa điều kiện biên tựa đơn (**Hình 1.17**). Sau đó thiết lập các phương trình cân bằng để tìm ra các biên độ của trường xấp xỉ.

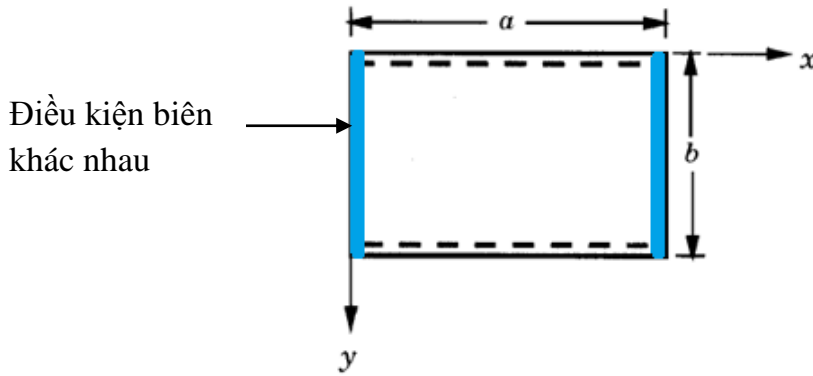
Trường chuyển vị được xấp xỉ theo FSDT của lời giải Navier:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \\
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

trong đó $\lambda = m\pi / a$, $\mu = n\pi / b$; m và n là số sóng dao động theo phương x và phương y ; ω là tần số dao động tự do của tấm; $i^2 = -1$; $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ là các biên độ của sóng.

1.2.6.1.2 Lời giải Levy

Nhược điểm của lời giải Navier có thể thấy là chỉ áp dụng cho các tấm tựa đơn. Để có thể áp dụng cho các bài toán với các điều kiện biên khác nhau. Lời giải Levy [21] mở rộng từ lời giải Navier trong đó giả thiết 2 cạnh đối diện của tấm là tựa đơn trong khi 2 cạnh còn lại với điều kiện biên khác nhau (**Hình 1.18**).



Hình 1.18: Tấm hình chữ nhật với 2 biên tựa đơn

Với giả thiết này trường chuyển vị (1.24) được viết lại dưới dạng:

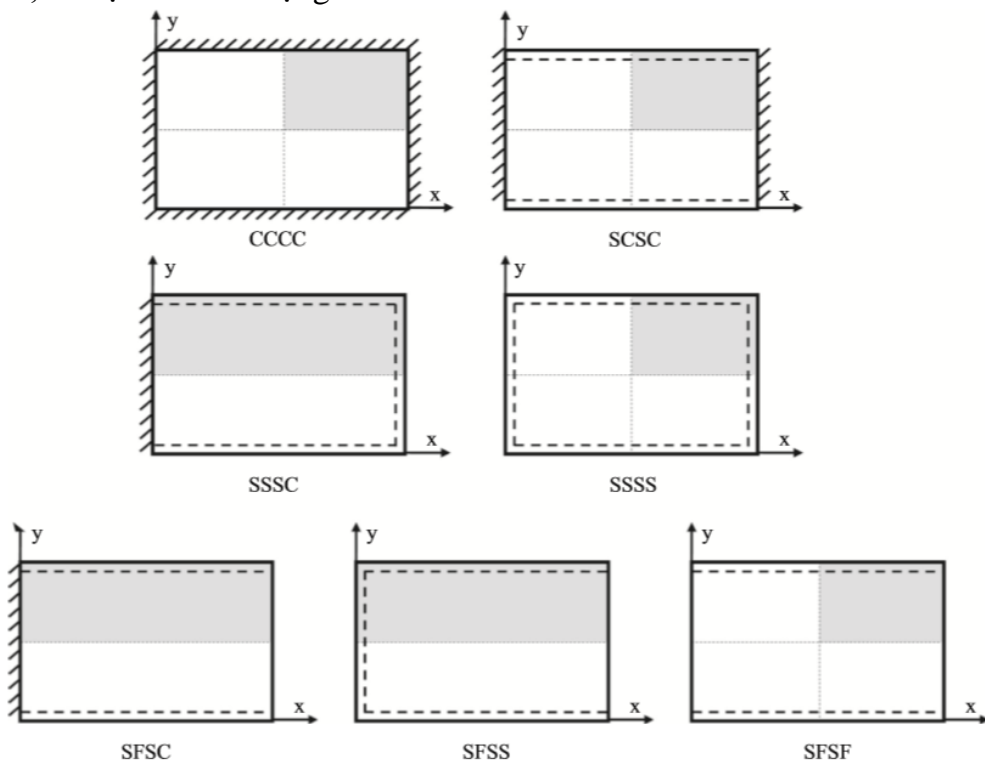
$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(y) \cos \lambda x e^{i\omega t} \\
 v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(y) \sin \lambda x e^{i\omega t} \\
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(y) \sin \lambda x e^{i\omega t} \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(y) \cos \lambda x e^{i\omega t} \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(y) \sin \lambda x e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Thay dạng xấp xỉ này vào các phương trình cân bằng sẽ dẫn đến hệ phương trình vi phân bậc cao theo y . Một số nghiên cứu điển hình của Thai và Kim khi sử dụng lời giải Levy để phân tích ứng xử của tấm ([82], [83], [84]). Có thể thấy rằng mặc dù lời giải Levy cải tiến lời giải Navier tuy nhiên phương pháp này chỉ có thể áp dụng cho tấm có 2 cạnh tựa đơn.

1.2.6.1.3 Lời giải Ritz

Lời giải Ritz là phương pháp giải tích áp dụng cho kết cấu tấm hay dầm với các điều kiện biên khác nhau (**Hình 1.19**) để phân tích ứng xử của kết cấu, đây là phần phát triển của lời giải Navier và mang lại nhiều hiệu quả nhất định. Một vài nghiên cứu đã công bố như Guenfoud và cộng sự [85] phân tích biến dạng của bài toán tấm hình chữ nhật trên nền đàn hồi; Ansari và cộng sự [86] phân tích lực tới hạn của ống nano carbon với các điều kiện biên khác nhau; Dozio [87] phân tích dao động của tấm vành khăn với các điều kiện biên khác nhau theo mô hình Ritz hợp nhất; Shahrabaki và Alibeigloo [88] dùng lời giải Ritz cho mô hình 3D để phân tích tần số dao động của tấm nano sợi carbon; Zenkour và Sobhy [89] đã phân tích lực tới hạn do nhiệt độ cho bài toán tấm nano trên nền đàn hồi với các điều kiện biên khác nhau; Sobhy ([90], [91]) đã phát triển những nghiên cứu của Zenkour bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích ứng xử tĩnh, ổn định và dao động

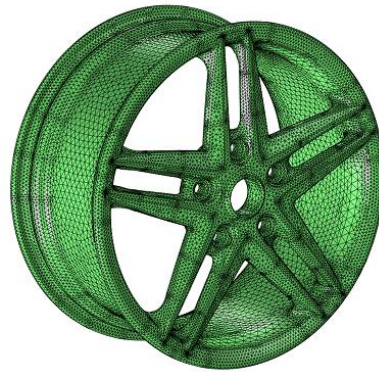
tự do của tấm nano đặt trên nền đàn hồi; Nguyen và cộng sự ([92], [93]) dùng lời giải Ritz để phân tích ứng xử của dầm sandwich FGM và dầm composite nhiều lớp; Thai và cộng sự [94] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất kết hợp với các hàm dạng áp đặt điều kiện biên dạng lượng giác đơn giản để phân tích bài toán tấm sandwich FGM trong đó chuỗi đơn theo mỗi phương được chọn để giải quyết bài toán. Tổng quan tình hình nghiên cứu cho thấy rằng rất ít nghiên cứu phát triển lời giải Ritz cho tấm FGM. Trong cách tiếp cận này, mục tiêu của luận án là vận dụng các hàm dạng áp đặt điều kiện biên kết hợp hàm biến dạng cắt bậc cao mới mà luận án đã phát triển để phân tích ứng xử của tấm FGM và tấm sandwich FGM cho bài toán tĩnh, ổn định và dao động.



Hình 1.19: Tấm hình chữ nhật với các điều kiện biên khác nhau [71]

1.2.6.2 Phương pháp số

Do những giới hạn của phương pháp giải tích trong việc giải quyết các bài toán với hình học phức tạp, phương pháp số trở nên là một công cụ hữu hiệu đặc biệt khi công nghệ máy tính ngày càng phát triển. Có thể kể đến một số phương pháp số điển hình như: Phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp không lưới, phương pháp đẳng hình học.

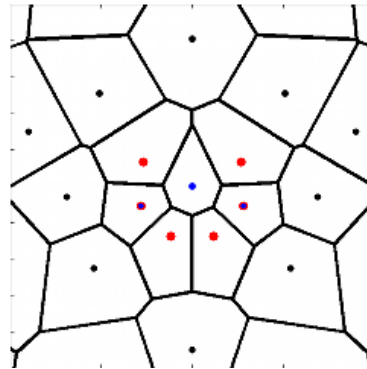


Hình 1.20: Lưới phần tử hữu hạn kết cấu vành bánh xe sử dụng phần mềm comsol <https://www.comsol.com/blogs/meshing-your-geometry-various-element-types/>

Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) là một phương pháp rất tổng quát và hữu hiệu cho lời giải số, và có thể áp dụng cho các bài toán kỹ thuật khác nhau. Từ việc phân tích trạng thái ứng suất, biến dạng trong các kết cấu cơ khí, các chi tiết trong ô tô, máy bay, tàu thủy, khung nhà cao tầng, dầm cầu... đến những bài toán của lý thuyết trường như lý thuyết truyền nhiệt, cơ học chất lỏng, thủy đàn hồi, khí đàn hồi... Với sự phát triển của Công nghệ thông tin và mô hình hóa hình học CAD, nhiều kết cấu phức tạp cũng đã được tính toán và thiết kế chi tiết một cách dễ dàng (**Hình 1.20**). Ý tưởng của PP PTHH là không cần tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền Ω_0 mà chỉ trong từng miền con Ω^e (miền phần tử) thuộc miền xác định Ω_0 . Trong phạm vi mỗi phần tử thì đại lượng cần tìm được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản được gọi là các hàm xấp xỉ và các hàm xấp xỉ này được biểu diễn thông qua các giá trị của hàm tại các điểm nút trên phần tử. Các giá trị này được gọi là các bậc tự do của phần tử và được xem là ẩn số cần tìm của bài toán. Những thuận lợi trên sẽ được phát huy khi phân tích bài toán tầm sử dụng lý thuyết FSDT nhưng khi áp dụng lý thuyết HSDT thì sẽ có khó khăn nhất định nhất là lựa chọn hàm xấp xỉ phải liên tục bậc C^1 . Ngoài ra, hiện tượng “khóa cắt” khi phân tích bài toán tầm mỏng cũng cần có những hiểu biết nhất định để mang lại kết quả như mong muốn.

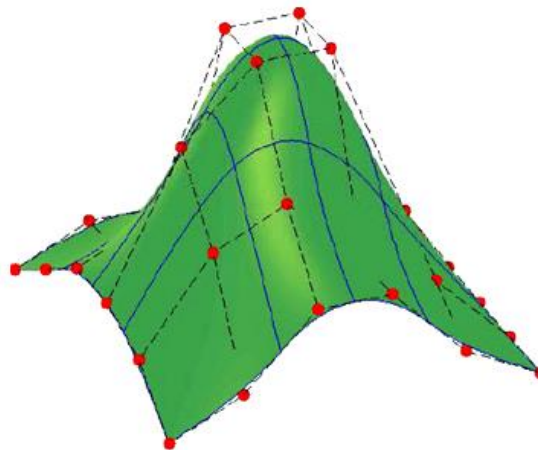
Hiện nay, có nhiều cách để khắc phục những nhược điểm ở trên (hiện tượng khóa cắt và phần tử liên tục C^1), đó là: thay thế các thành phần đạo hàm trong (1.22) bằng các hàm độ cong liên tục bậc C^0 khi áp dụng lý thuyết HSDT của PP PTHH (bài toán 7 biến). Hiện tượng “khóa cắt” được khử bằng cách giả sử biến dạng tự nhiên (ANS) ([95], [96], [97]), biến dạng tự nhiên nâng cao (EAS) ([98], [99]), rời rạc sự khác biệt cắt (DSG) ([100], [101]), hoặc nội suy các thành phần tensor hỗn hợp (MITC) ([102], [103], [104], [105], [106], [107], [108]). Do sử dụng hàm dạng C^0 trong xấp xỉ trường chuyển vị, các thành phần biến dạng trong phần tử tầm là hằng số trong miền phần tử nhưng lại có sự chênh lệch giá trị giữa các phần tử. Để làm giảm sự chênh lệch biến dạng giữa các phần tử, hay còn gọi là làm trơn trường biến dạng ([109], [110], [111], [112], [113], [114], [115]) đã trung bình trường biến dạng trên các miền được định nghĩa trên phần tử, các phần tử chung cạnh, chung nút hoặc

trên mặt phần tử để hình thành PP PTHH tron trên miền (CS), trên cạnh (ES), trên nút (NS) hoặc trên mặt (FS) phần tử.



Hình 1.21: Phương pháp không lưới với điểm chia theo ô Voronoi
<https://math.temple.edu/~seibold/research/meshfree/>

Bên cạnh PP PTHH, phương pháp không lưới gần đây cũng đã được phát triển cho phân tích ứng xử tấm FGM ([116], [117], [118], [119], [120], [121]). Nghiên cứu tổng quan về phương pháp không lưới cho phân tích ứng xử kết cấu tấm vỏ chức năng FGM có thể tham khảo trong nghiên cứu của Liew và cộng sự [122]. **Hình 1.21** minh họa một trường hợp rời rạc các điểm xấp xỉ theo phương pháp ô Voronoi. Phương pháp không lưới là phương pháp xấp xỉ các phương trình vi phân từng phần trên các điểm xấp xỉ. Ưu điểm của phương pháp này so với PP PTHH là khả năng giải quyết tốt các bài toán biên dạng lớn, các bài toán phi tuyến. Tuy nhiên trong thực tế, phương pháp này có khối lượng tính toán lớn.



Hình 1.22: Phương pháp đẳng hình học - xấp xỉ dựa trên các điểm khóa hình học [123]

Hiện nay với sự phát triển của công nghệ máy tính, PP PTHH và phương pháp không lưới có thể giải quyết nhiều bài toán kỹ thuật với độ phức tạp khác nhau, tuy nhiên đối với các kết cấu có hình học phức tạp thì bài toán chia lưới hay các điểm chia có thể trở thành một vấn đề. Để khắc phục vấn đề này, phương pháp đẳng hình học (IGA) đang là một chủ đề thu hút nhiều nghiên cứu trong những năm gần đây.

Phương pháp đẳng hình học là một phương pháp số được đề xuất bởi Hughes và cộng sự [124], phương pháp này là sự kết hợp giữa mô hình hóa hình học CAD và phân tích phần tử hữu hạn. Sự kết hợp này được thể hiện ở việc sử dụng cùng hàm dạng trong mô hình hình học và phần tử hữu hạn (**Hình 1.22**), do đó thay vì sử dụng các hàm dạng cơ bản dựa trên đa thức Lagrange, IGA sử dụng các hàm dạng cơ bản trong mô hình hóa hình học (B-splines). Cách tiếp cận của IGA cho phép xấp xỉ các biến trường, thay vì dựa trên nút phần tử, trên các điểm khóa hình học, điều này làm giảm bớt khối lượng tính toán, khó khăn chia lưới đặc biệt cho các dạng hình học phức tạp. Phương pháp này đã được áp dụng cho phân tích tấm FGM ([125], [126], [127], [128]).

Luận án sẽ thiết lập mô hình PTHH cho bài toán tấm FGM với phần tử thông thường 4 nút và phần tử MITC 3 nút kết hợp các phương pháp làm trơn: trên miền (CS), trên cạnh (ES) và trên nút (NS) thông qua ngôn ngữ lập trình Matlab, kể cả trường hợp phi tuyến hình học. Mức độ chính xác và sự hiệu quả của phương pháp cần phải có những hiểu biết nhất định về cơ sở lý thuyết, kỹ thuật mô hình hoá cũng như các bước tính cơ bản của phương pháp và vấn đề khai thác ngôn ngữ lập trình.

1.3 Mục tiêu nghiên cứu

Nghiên cứu ứng xử tấm composite chức năng (FGM) chịu tải trọng cơ nhiệt được cụ thể hoá một số vấn đề:

- Phân tích và tổng hợp các mô hình, quy luật ứng xử của vật liệu FGM hiện nay.
- Phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất nhằm tăng mức độ chính xác của bài toán trong việc phân tích kết cấu tấm composite FGM.
- Phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, trong đó đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới phù hợp cho nhiều loại bài toán để phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM (kể cả lý thuyết Quasi-3D).
- Phát triển lời giải tích (Navier và Ritz) để phân tích ứng xử của tấm composite FGM.
- Phát triển PP PTHH bằng cách sử dụng phần tử khử khoá cắt làm trơn trên miền, trên cạnh và trên nút để phân tích ứng xử tuyến tính và phi tuyến của tấm FGM.
- Xây dựng chương trình tính toán của các phương pháp giải bằng ngôn ngữ lập trình Matlab để tính toán các thành phần nội lực, ứng suất, chuyển vị, lực tới hạn và tần số dao động của kết cấu tấm composite FGM và tấm composite nhiều lớp.
- Khảo sát nhiều dạng bài toán khác nhau nhằm tăng tính đa dạng và mức độ phong phú của luận án, đồng thời kiểm tra kết quả đạt được và so sánh với các kết quả của các nghiên cứu khác.
- Sự ảnh hưởng của các phương pháp đồng nhất hoá, kỹ thuật làm giảm số ẩn của phương trình đặc trưng, hệ số đặc trưng vật liệu, tỉ số hai cạnh, tỉ số cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc phân lớp, hệ số nền, các lý thuyết biến dạng cắt

bậc cao khác nhau, các phương pháp làm trơn phần tử, lý thuyết biến dạng lớn... đều được khảo sát và phân tích một cách chi tiết.

- Đưa ra các nhận xét, kết luận và hướng phát triển của luận án.

1.4 Nội dung nghiên cứu

Những khái niệm, đặc tính, lịch sử phát triển và ứng dụng của vật liệu FGM trong kỹ thuật, mô hình ước lượng các đặc tính hữu hiệu, cơ sở lý thuyết và các phương pháp tính toán cho kết cấu tấm đã được đề cập. Tuy nhiên, do sự thay đổi dần dần đặc tính vật liệu FGM cho phép tạo ra những loại vật liệu mới có ứng dụng rộng rãi trong thực tế, cũng chính vì thế tạo nên sự không đồng nhất vật liệu và gây ra một số bất lợi về việc phân tích ứng xử của kết cấu, nhất là vị trí mặt trung hoà vật lý. Bên cạnh đó, việc áp dụng các lý thuyết tính toán khác nhau FSDT, HSDT, Quasi-3D, kể cả HSDT có kể đến thành phần biến dạng nhỏ chuyển vị lớn cho kết cấu tấm FGM vẫn còn một số tồn tại nhất định: hệ số điều chỉnh cắt, chọn hàm biến dạng cắt thích hợp cho tất cả các bài toán... Hơn thế nữa, việc sử dụng PP PTHH để giải phương trình đặc trưng còn gặp khó khăn bởi hiện tượng “khóa cắt”, phương trình đặc trưng bị suy biến khi sử dụng lý thuyết HSDT... Những tồn tại này sẽ được giải quyết thông qua các nội dung nghiên cứu của luận án:

- Kết hợp hệ số điều chỉnh cắt cải tiến đã phát triển với vị trí mặt trung hoà vật lý trên cơ sở lý thuyết FSDT để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm composite FGM thông qua việc thiết lập phương trình cân bằng, sử dụng lời giải Navier và PP PTHH để giải quyết bài toán. Trong phần này, cũng xét đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, xét ảnh hưởng của nền đàn hồi...
- Đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để phân tích cho tấm với các điều kiện biên khác nhau theo phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Phát triển phần tử khử khóa cắt CS-MITC3, ES-MITC3, NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM.
- Phát triển phần tử khử khóa cắt CS-MITC3, ES-MITC3 theo lý thuyết biến dạng Von–Karman để phân tích bài toán tĩnh với phi tuyến hình học của kết cấu tấm FGM và tấm composite nhiều lớp.
- Đánh giá hiệu ứng của các mô hình tính toán vật liệu đồng nhất hóa thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM.

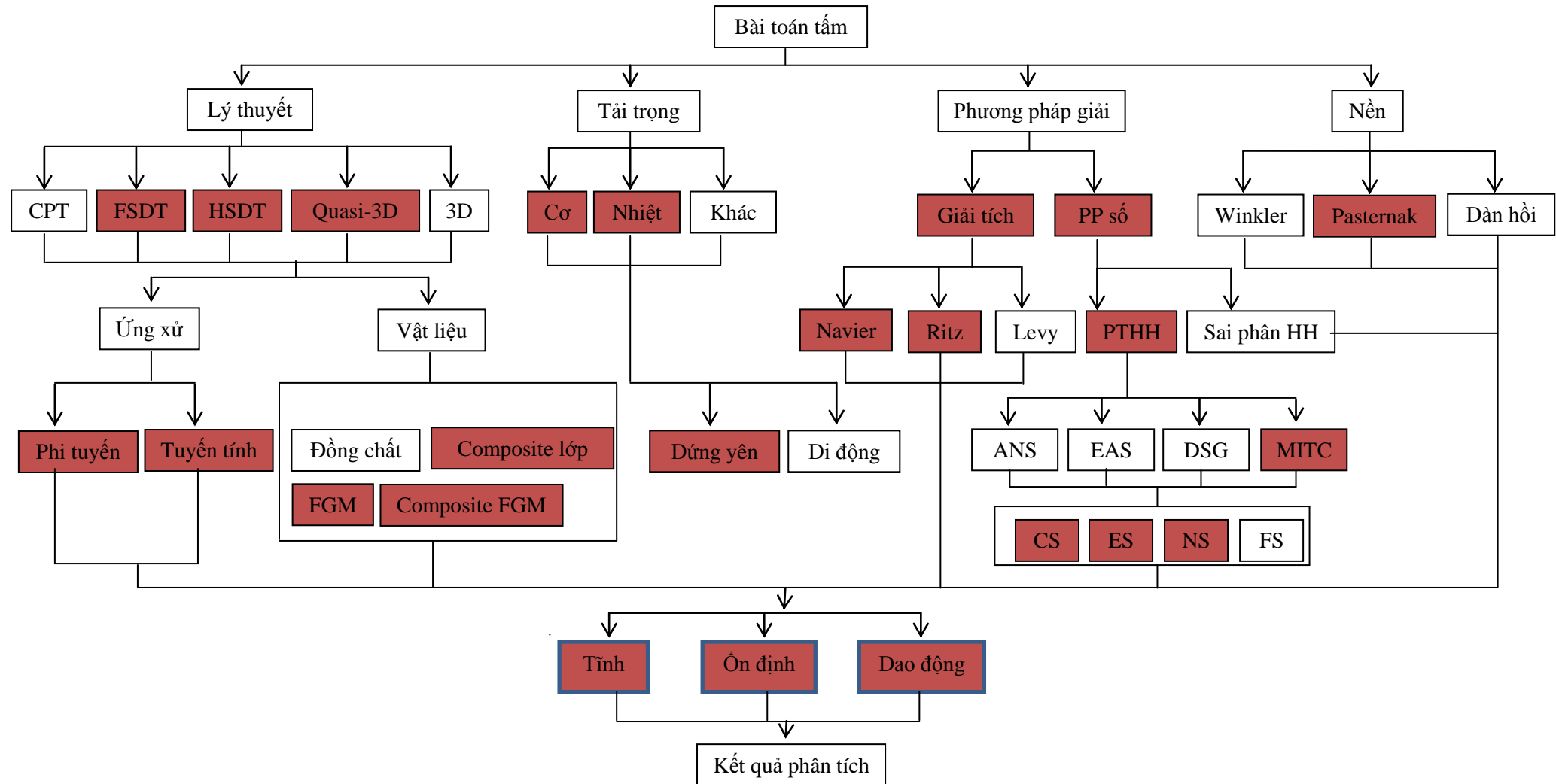
1.5 Tính mới của luận án

Thông qua nội dung nghiên cứu, tính mới của luận án được tổng hợp và thể hiện như **Hình 1.23**. Tính mới sẽ lần lượt xuất hiện trong từng chương của luận án:

- Kết hợp hệ số điều chỉnh cắt cải tiến đã phát triển với vị trí mặt trung hoà vật lý trên cơ sở lý thuyết FSDT để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM. Ngoài ra, luận án cũng đề

cập đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, xét ảnh hưởng của nền đàn hồi thông qua lời giải Navier và PP PTHH.

- Đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để phân tích cho tấm với các điều kiện biên khác nhau theo phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3, NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM và composite FGM từ hàm biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3 và hàm biến dạng cắt bậc cao của luận án.
- Phát triển phần tử khử khoá cắt CS-MITC3, ES-MITC3 theo lý thuyết biến dạng Von–Karman để phân tích bài toán tĩnh của kết cấu tấm FGM và tấm composite nhiều lớp từ hàm biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3.
- Đánh giá hiệu ứng của các mô hình tính toán vật liệu cũng như các quy luật ứng xử hiện nay thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm composite FGM.



Hình 1.23: Tổng hợp các đối tượng liên quan đến bài toán tâm FGM

1.6 Bộ cục luận án

Luận án bao gồm 171 trang (không kể phần tài liệu tham khảo và phụ lục), 100 hình và 60 bảng biểu. Ngoài phần mở đầu, luận án bao gồm 7 chương:

- Chương 1 trình bày tổng quan lý thuyết liên quan đến vật liệu composite chức năng, các mô hình phân bố vật liệu, các lý thuyết tính toán và các phương pháp giải phương trình đặc trưng của bài toán.
- Chương 2 trình bày mô hình phân tích tấm chức năng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, chủ yếu tập trung khai thác hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến kết hợp với vị trí mặt trung hoà vật lý để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động cho kết cấu tấm FGM. Ngoài ra, luận án cũng xét đến kỹ thuật làm giảm số ẩn số của phương trình đặc trưng, ảnh hưởng của nền đàn hồi thông qua lời giải Navier và PP PTHH.
- Chương 3 trình bày mô hình phân tích tấm chức năng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, phần này luận án phát triển một hàm biến dạng cắt bậc cao mới để xây dựng lý thuyết HSDT và Quasi-3D cho phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động của kết cấu tấm FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Kết hợp lời giải Ritz để giải quyết bài toán tấm với các điều kiện biên khác nhau của phương pháp giải tích nhằm khắc phục nhược điểm của lời giải Navier.
- Chương 4 trình bày phân tích tấm FGM bằng phần tử MITC3 làm tròn sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, phần này đề cập đến phần tử khử khoá cắt của PP PTHH kết hợp với việc làm tròn trên miền (CS), trên cạnh (ES) và trên nút (NS) phần tử để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm FGM.
- Chương 5 trình bày phân tích tấm FGM bằng phần tử CS-MITC3 và ES-MITC3 có xét thành phần biến dạng nhỏ chuyển vị lớn Von-Karman theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, phần này tập trung khai thác thành phần phi tuyến của trường biến dạng để phân tích bài toán tĩnh của kết cấu tấm nhằm mang đến kết quả tin cậy đúng với sự làm việc của kết cấu.
- Chương 6 trình bày hiệu ứng các phương pháp tính toán các đặc tính đàn hồi đồng nhất hoá đến ứng xử của tấm FGM, phần này chủ yếu đánh giá hiệu ứng các mô hình tính toán vật liệu hiện nay thông qua việc phân tích ứng xử của kết cấu tấm FGM.
- Chương 7 trình bày kết luận, các kết quả đạt được, hướng phát triển tiếp theo cũng như các nội dung liên quan mà trong khuôn khổ luận án chưa đề cập đến.

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH TẤM CHỨC NĂNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

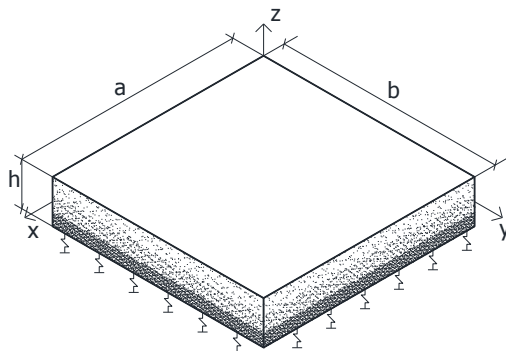
2.1 Giới thiệu

Mô hình phân tích tấm chức năng (FGM) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) là mô hình đơn giản để phân tích ứng xử của kết cấu tấm. Theo mô hình này thì giá trị ứng suất cắt là hằng số theo chiều dày của tấm nên đòi hỏi cần phải có một hệ số điều chỉnh cắt để tính toán giá trị ứng suất này. Bên cạnh đó, FGM là loại vật liệu không đồng nhất nên cần phải xác định chính xác vị trí mặt trung hòa vật lý. Trong chương này lần lượt trình bày các vấn đề sau: trường biến dạng và động học, phương trình năng lượng, phương pháp giảm bớt số ẩn của bài toán, vị trí mặt trung hòa vật lý, phương pháp tính toán (sử dụng lời giải giải tích và PP PTHH để phân tích bài toán), kết quả tính toán số. Cuối cùng là những kết luận thu được từ quá trình phân tích lời giải.

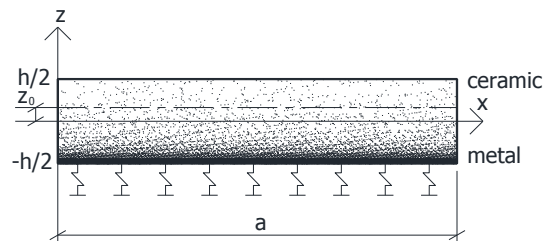
2.2 Trường biến dạng và động học

2.2.1 Mô hình và đặc trưng vật liệu tấm FGM

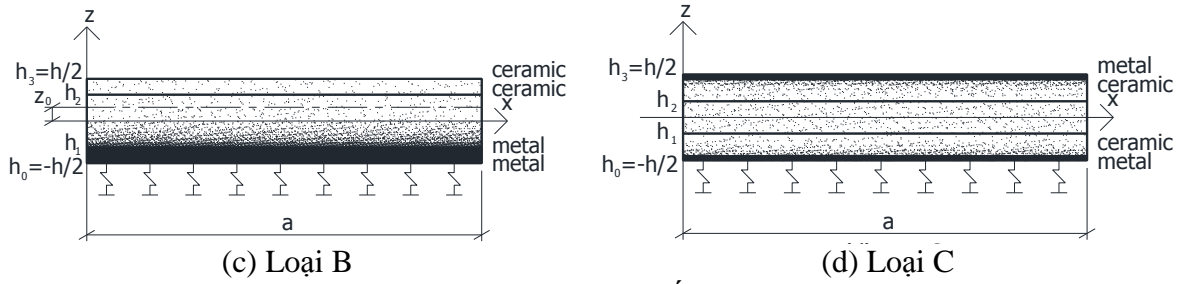
Tấm FGM hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều cao là h đặt trên nền đàn hồi như **Hình 2.1**. Đối với tấm FGM được chế tạo từ gốm (ceramic) và kim loại (metal) có các đặc tính hữu hiệu vật liệu thay đổi liên tục theo chiều dày tấm theo quy luật lũy thừa và hàm mũ.



(a) Mô hình tấm



(b) Loại A



Hình 2.1: Mô hình tấm FGM

Đặc trưng hữu hiệu của tấm được xác định theo quy luật hàm lũy thừa [2] (PGM):

$$P^{(j)}(z) = (P_c - P_m)V_c^{(j)}(z) + P_m \quad (2.1)$$

trong đó P_c và P_m là môđun đàn hồi (E), hệ số Poisson (ν), khối lượng thể tích (ρ) của vật liệu gốm và kim loại; V_c là hàm mật độ thể tích thay đổi theo quy luật lũy thừa hệ số mũ tùy thuộc vào từng loại tấm (**Hình 2.2**):

- Tấm loại A: được chế tạo từ kim loại và gốm với hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) (**Hình 2.1b**):

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad (2.2)$$

trong đó p là hệ số đặc trưng vật liệu, h là chiều dày tấm.

- Tấm loại B: là tấm composite với lớp trên là gốm, lớp dưới được chế tạo từ kim loại, và lõi giữa được làm từ kim loại và gốm (**Hình 2.1c**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

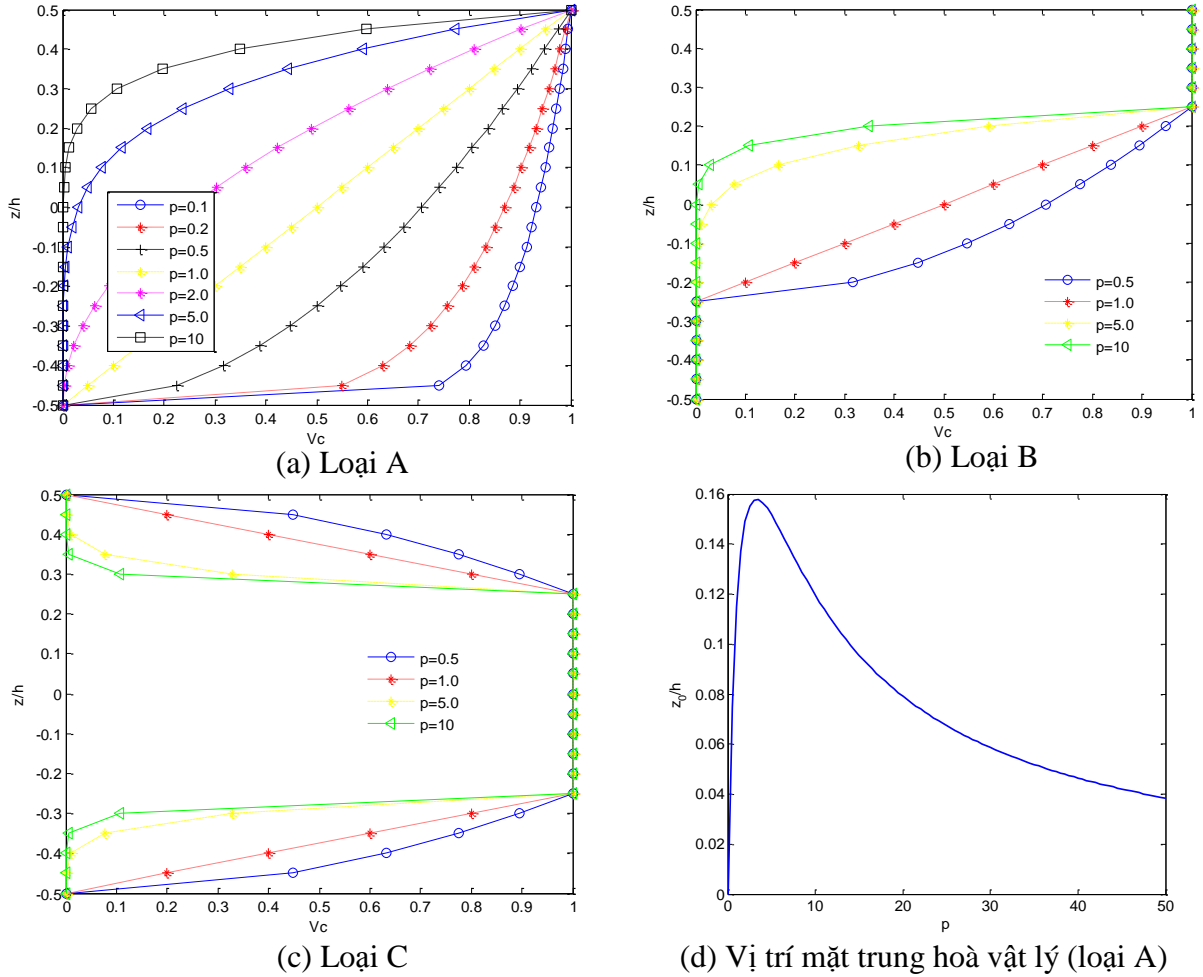
$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.3)$$

- Tấm loại C: là tấm composite với lớp trên, lớp dưới được chế tạo từ gốm và kim loại, và lõi giữa được làm từ gốm (lõi cứng) hay kim loại (lõi mềm) (**Hình 2.1d**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (2.4)$$

Đặc trưng hữu hiệu của tấm cũng được xác định theo quy luật hàm mũ [129] (EGM):

$$P^{(j)}(z) = P_c \left(\frac{P_m}{P_c} \right)^{V_c^{(j)}} \quad (2.5)$$



Hình 2.2: Giá trị V_c và vị trí mặt trung hoà vật lý theo chiều dày tấm

2.2.2 Vị trí mặt trung hoà vật lý

Trường chuyển vị tại mặt trung hoà vật lý (**Hình 2.1**) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + (z - z_0)\theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + (z - z_0)\theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

trong đó $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ là các thành phần chuyển vị và góc xoay tại vị trí mặt trung hoà của tấm, z_0 là vị trí mặt trung hoà vật lý đối với mặt trung bình.

Ngoài ra, nhằm làm giảm bớt số ẩn số của phương trình (2.6) thì một phương pháp giảm biến đó là tách thành phần chuyển vị w thành hai thành phần: chuyển vị do uốn w_b và chuyển vị do cắt w_s . Lúc này, hai thành phần góc xoay được xác định

theo thành phần chuyển vị uốn: $\theta_x = -\partial w_b / \partial x$, $\theta_y = -\partial w_b / \partial y$ (kết quả bài toán 4 biến nằm trong phần phụ lục). Phương trình (2.6) được viết lại:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + (z - z_0) \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + (z - z_0) \frac{\partial w_b}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Quan hệ giữa trường biến dạng và trường chuyển vị suy ra từ (2.6) như sau:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + (z - z_0) \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.8a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.8b)$$

Xét thành phần biến dạng và chuyển vị thẳng theo phương x (2.8a):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + (z - z_0) \kappa_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

trong đó $z_1 = z - z_0$.

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\sigma_{xx} = E(z_1) \varepsilon_{xx} \quad (2.10)$$

Điều kiện cân bằng vật thể:

$$\sum F_x = \int_{-\frac{h}{2}-z_0}^{\frac{h}{2}-z_0} \sigma_{xx} dA = 0 \quad (2.11)$$

Thay (2.9), (2.10) vào (2.11) và bỏ qua thành phần $\partial u / \partial x$:

$$\int_{-\frac{h}{2}-z_0}^{\frac{h}{2}-z_0} E(z_1) z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz_1 = 0 \quad (2.12)$$

Viết lại:

$$\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_0 E(z) dz \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.13)$$

Vị trí mặt trung hòa vật lý (**Hình 2.2d**):

$$z_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (2.14)$$

Công thức (2.8a), (2.8b) viết lại dưới dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + (z - z_0)\boldsymbol{\kappa} \quad (2.15a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^0 \quad (2.15b)$$

trong đó $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, $\boldsymbol{\kappa}$ và $\boldsymbol{\gamma}^0$ là các thành phần biến dạng màng, biến dạng uốn và biến dạng cắt của tấm. Quan hệ giữa các thành phần biến dạng và chuyển vị:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.16a)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.16b)$$

2.3 Phương trình năng lượng

Nguyên lý biến phân Hamilton của một hệ được xác định:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K + \delta U_F) dt \quad (2.17)$$

trong đó δU , δV , δK và δU_F là các thành phần biến phân năng lượng biến dạng, biến phân thế năng, biến phân động năng và biến phân năng lượng biến dạng nền của tấm FGM.

Thành phần biến phân năng lượng biến dạng:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{A-h/2}^{h/2} \int (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ &= \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + M_{xx} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) + Q_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \theta_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \delta \theta_y \right) \right] dA \end{aligned} \quad (2.18)$$

trong đó \mathbf{N} , \mathbf{M} và \mathbf{Q} là các thành phần nội lực trong tấm:

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (2.19a)$$

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z - z_0) (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (2.19b)$$

$$(\mathcal{Q}_x, \mathcal{Q}_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (2.19c)$$

Thành phần biến phân thế năng:

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta w dA - \int_A q \delta w dA \quad (2.20)$$

trong đó q là tải trọng phân bố trên tấm, \bar{N} là thành phần lực nằm trong mặt trung hòa của tấm:

$$\bar{N} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.21)$$

Thành phần biến phân động năng:

$$\begin{aligned} \delta K = \int_V (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) \rho(z) dA dz = \int_A [I_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \\ + I_1 (\dot{u} \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_x \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y \delta \dot{v}) + I_2 (\dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y)] dA \end{aligned} \quad (2.22)$$

trong đó dấu $(\dot{\cdot})$ là đạo hàm các thành phần chuyển vị theo thời gian (t), $\rho(z)$ là khối lượng riêng và I_0, I_1, I_2 là các thành phần quán tính của tấm:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, (z - z_0), (z - z_0)^2) \rho(z) dz \quad (2.23)$$

Thành phần biến phân năng lượng biến dạng nền:

$$U_F = \int_A \left[K_w w - K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \delta w dA \quad (2.24)$$

trong đó K_w, K_s là các giá trị hệ số nền.

Thay (2.18), (2.20), (2.22) và (2.24) vào (2.17) và thực hiện các phép biến đổi toán học, phương trình của hệ được biểu diễn dưới dạng các phương trình Euler-Lagrange (bằng cách cho các giá trị tương ứng với các biến phân $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x$ và $\delta \theta_y$ bằng 0) có dạng như sau:

$$\begin{aligned} \delta u : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_x \\ \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\theta}_y \\ \delta w : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - K_w w + K_s \nabla^2 w + \bar{N}(w) + q &= I_0 \ddot{w} \\ \delta \theta_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\theta}_x \\ \delta \theta_y : \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\theta}_y \end{aligned} \quad (2.25)$$

với $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

2.4 Quan hệ giữa nội lực và biến dạng

Phương trình ứng xử của tấm FGM biểu diễn mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.26a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.26b)$$

trong đó:

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}; C_{12}(z) = \nu(z)C_{11}(z) \quad (2.27a)$$

$$C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (2.27b)$$

Thay (2.19) vào (2.26) và kết hợp với (2.27) ta thu được mối quan hệ giữa các thành phần lực và mô men uốn với các thành phần biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

trong đó $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ lần lượt là các ma trận độ cứng màng, độ cứng uốn, độ cứng tương tác giữa màng, uốn và xoắn của tấm FGM.

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, (z-z_0), (z-z_0)^2) \mathbf{C}(z) dz \quad (2.29)$$

Tương tự, thành phần lực cắt:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

hay dưới dạng thu gọn:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^s \boldsymbol{\gamma}^0 \quad (2.31)$$

2.5 Hệ số điều chỉnh biến dạng cắt

Độ cứng cắt của tấm FGM:

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \kappa^s \int_{-h/2}^{h/2} C_{44}(z) dz = \kappa^s \int_{-h/2}^{h/2} C_{55}(z) dz \quad (2.32)$$

với κ^s là hệ số hiệu chỉnh biến dạng cắt γ^s , vì γ^s là hằng số theo chiều dày tấm.

Phương trình (2.28) được viết lại:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Thay thế các giá trị ứng suất từ (2.26) ta có được ứng suất trong mặt phẳng tấm $\boldsymbol{\sigma}_{(ip)} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yy}]^T$ như sau:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(ip)}(x, y, z) = [\mathbf{C}(z)(\mathbf{a} + (z - z_0)\mathbf{b})]\mathbf{N}(x, y) + [\mathbf{C}(z)(\mathbf{b} + (z - z_0)\mathbf{d})]\mathbf{M}(x, y) \quad (2.34)$$

Hệ số hiệu chỉnh biến dạng cắt cũng được tính toán thông qua độ cứng cắt [1]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(op)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = - \int_{-h/2}^z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{Bmatrix} d\xi \quad (2.35)$$

Thành phần ứng suất cắt cũng được xác định theo các phương trình ứng xử:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

với:

$$\mathbf{R}(z) = - \int_{-h/2}^z \mathbf{C}(\xi)(\mathbf{b} + \xi\mathbf{d})d\xi \quad (2.37)$$

Cân bằng năng lượng biến dạng cắt trên một đơn vị diện tích:

$$\pi_s = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} Q_x^2 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R_{11}^2(z)}{G(z)} dz = \frac{1}{2} \frac{Q_x^2}{H} \quad (2.38)$$

Ta thu được độ cứng cắt cải tiến (H):

$$H_{44} = H_{55} = H = \left(\int_{-h/2}^{h/2} \frac{[R_{11}(z)]^2}{G(z)} dz \right)^{-1} \quad (2.39)$$

trong đó $G(z) = E(z) / 2(1 + \nu(z))$ là môđun cắt thay đổi theo chiều dày tấm.

Lúc này, hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến (κ^s) được xác định:

$$\kappa^s = \frac{H}{\int_{-h/2}^{h/2} C_{55}(z)dz} \quad (2.40)$$

Thành phần lực cắt trong tấm sẽ được viết lại như sau:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Thay thế (2.41), (2.28) vào (2.25) ta sẽ có được hệ phương trình cân bằng của tấm FGM theo các thành phần chuyển vị ($u, v, w, \theta_x, \theta_y$).

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \\
& + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_x \\
& A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \\
& + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\theta}_y \\
& H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - K_w w + K_s \nabla^2 w + \bar{N}(w) + q = I_0 \ddot{w} \\
& B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
& + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) - H \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\theta}_x \\
& B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\
& + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) - H \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) = I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\theta}_y
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Nếu sử dụng trường chuyển vị 4 biến theo (2.7) thì phương trình cân bằng để giải có dạng:

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
& = I_0 \ddot{u} - \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \\
& A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\
& = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \\
& B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
& - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - K_w (w_b + w_s) + K_s \nabla^2 (w_b + w_s) \\
& + \bar{N}(w) + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

$$H\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right) - K_w(w_b + w_s) + K_s \nabla^2(w_b + w_s) + \bar{N}(w) + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (2.43)$$

2.6 Phương pháp tính toán

2.6.1 Lời giải giải tích

Xét tấm FGM hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều cao là h như **Hình 2.1**. Tấm chịu tải trọng ngang $q(x, y)$ và tải trọng dọc trục phân bố đều $N_{xx}^0 = R_1 N_0, N_{yy}^0 = R_2 N_0, N_{xy}^0 = 0$. Lời giải giải tích (Navier) áp dụng cho tấm FGM với bốn biên là tựa đơn, trường chuyển vị của bài toán được xấp xỉ dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa điều kiện biên:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\ \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\ \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tương tự, hai thành phần w_b, w_s được xấp xỉ:

$$\begin{aligned} w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\ w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.45)$$

trong đó $\lambda = m\pi/a, \mu = n\pi/b$, m và n là số sóng dao động theo phương x và phương y , ω là tần số dao động tự do của tấm, $i^2 = -1$. $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$ là các biên độ của sóng. Tải trọng tác dụng trên tấm cũng được xấp xỉ dưới dạng chuỗi lượng giác:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (2.46)$$

với $q_{mn} = q_0$ nếu tải phân bố có dạng hình sin. Thay thế các thành phần chuyển vị và gia tốc từ (2.44) vào (2.42) và (2.45) vào (2.43) thu được hệ phương trình (2.47) và (2.49) có dạng $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{q}$. Để phân tích bài toán tĩnh (giải $\mathbf{KU} = \mathbf{q}$ để tìm

biên độ của sóng), bài toán ổn định (giải $|\mathbf{K}_{ij}| = 0$ để tìm N_0), dao động tự do (tìm trị riêng của ma trận \mathbf{KM}^{-1}) của tấm.

Bài toán 5 biến theo (2.6):

$$(\mathbf{K}^{5 \times 5} - \omega^2 \mathbf{M}^{5 \times 5}) \mathbf{U}^{5 \times 1} = \mathbf{q}^{5 \times 1} \quad (2.47)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2, k_{12} = (A_{12} + A_{66}) \lambda \mu, k_{14} = B_{11} \lambda^2 + B_{66} \mu^2 \\ k_{15} &= (B_{12} + B_{66}) \lambda \mu, k_{22} = A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2, k_{24} = (B_{12} + B_{66}) \lambda \mu \\ k_{25} &= B_{66} \lambda^2 + B_{22} \mu^2, k_{33} = H(\lambda^2 + \mu^2) + K_w + K_s(\lambda^2 + \mu^2) + \alpha \\ k_{34} &= H \lambda, k_{35} = H \mu, k_{44} = (D_{11} \lambda^2 + D_{66} \mu^2 + H) \\ k_{45} &= (D_{12} + D_{66}) \lambda \mu, k_{55} = (D_{66} \lambda^2 + D_{22} \mu^2 + H) \\ \alpha &= N_0 (R_1 \lambda^2 + R_2 \mu^2) \\ m_{11} &= m_{22} = m_{33} = I_0, m_{14} = m_{25} = I_1, m_{44} = m_{55} = I_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Bài toán 4 biến theo (2.7):

$$(\mathbf{K}^{4 \times 4} - \omega^2 \mathbf{M}^{4 \times 4}) \mathbf{U}^{4 \times 1} = \mathbf{q}^{4 \times 1} \quad (2.49)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2, k_{12} = (A_{12} + A_{66}) \lambda \mu \\ k_{13} &= -B_{11} \lambda^3 - (B_{12} + B_{66}) \lambda \mu^2, k_{22} = A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2 \\ k_{23} &= -B_{22} \mu^3 - (B_{12} + B_{66}) \lambda^2 \mu \\ k_{33} &= (D_{11} \lambda^4 + D_{22} \mu^4) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + \alpha + \beta, k_{34} = \alpha + \beta \\ k_{44} &= H(\lambda^2 + \mu^2) + \alpha + \beta, m_{11} = m_{22} = m_{34} = m_{44} = I_0, m_{13} = -\lambda I_1 \\ m_{23} &= -\mu I_1, m_{33} = I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2) \\ \alpha &= N_0 (R_1 \lambda^2 + R_2 \mu^2), \beta = K_w + K_s(\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.6.2 Phương pháp số (PP PTHH)

2.6.2.1 Thiết lập các công thức phần tử hữu hạn

Ý tưởng của PP PTHH là không cần tìm dạng xấp xỉ của hàm cần tìm trên toàn miền Ω_0 mà chỉ trong từng miền con Ω^e (miền phần tử) thuộc miền xác định Ω_0 .

Phương trình cân bằng năng lượng dạng yếu của tấm FGM:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta w^T (\bar{N} + q) w d\Omega - \int_{\Omega} \delta \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \quad (2.51)$$

trong đó:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_s^* = \mathbf{A}^S, \boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 & \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}^T \quad (2.52)$$

Theo lý thuyết tấm Reissner-Mindlin, trường chuyển vị $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$ là các biến độc lập và hàm dạng được chọn để biểu diễn các đại lượng độc lập này là các hàm nội suy Lagrange. Phần tử tám được chọn là phần tử hình chữ nhật có cạnh $a \times b$ 4 nút, mỗi nút có 5 bậc tự do là $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$ như **Hình 2.3a**. Chuyển vị phần tử có dạng như sau:

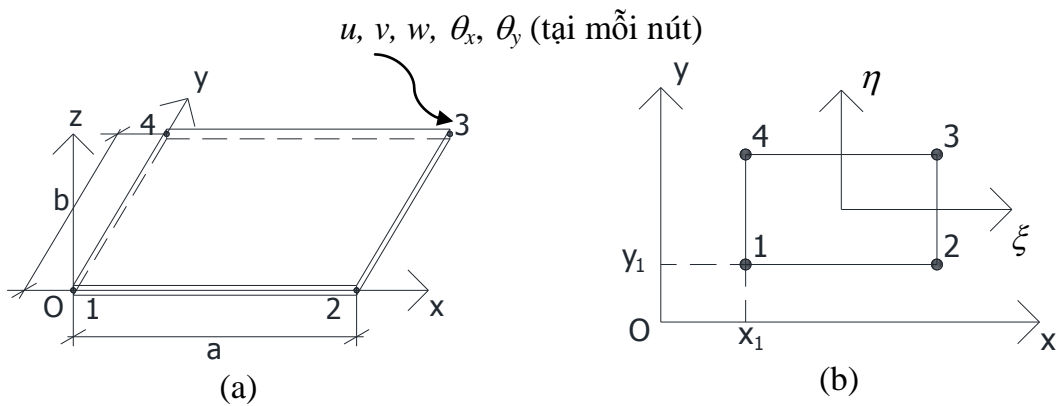
$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{j=1}^4 u_j \psi_j^e(x, y) \\
 v(x, y) &= \sum_{j=1}^4 v_j \psi_j^e(x, y) \\
 w(x, y) &= \sum_{j=1}^4 w_j \psi_j^e(x, y) \\
 \theta_x(x, y) &= \sum_{j=1}^4 S_j^1 \psi_j^e(x, y) \\
 \theta_y(x, y) &= \sum_{j=1}^4 S_j^2 \psi_j^e(x, y)
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

với ψ_j^e là các hàm nội suy Lagrange (theo tọa độ tự nhiên **Hình 2.3b**) có dạng [21]:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^e &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad \psi_2^e = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 \psi_3^e &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad \psi_4^e = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

trong đó:

$$\xi = \frac{2(x-x_1)-a}{a}, \quad \eta = \frac{2(y-y_1)-b}{b} \tag{2.55}$$



Hình 2.3: Phần tử tám hình chữ nhật và tọa độ tự nhiên

Phương trình (2.51) được viết lại:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{K}^{14} & \mathbf{K}^{15} \\ \mathbf{K}^{12T} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{K}^{24} & \mathbf{K}^{25} \\ \mathbf{K}^{13T} & \mathbf{K}^{23T} & \mathbf{K}^{33} + \alpha' & \mathbf{K}^{34} & \mathbf{K}^{35} \\ \mathbf{K}^{14T} & \mathbf{K}^{24TT} & \mathbf{K}^{34T} & \mathbf{K}^{44} & \mathbf{K}^{45} \\ \mathbf{K}^{15T} & \mathbf{K}^{25T} & \mathbf{K}^{35T} & \mathbf{K}^{45T} & \mathbf{K}^{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{S}^2 \end{Bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} I_0 \mathbf{M} & 0 & 0 & I_1 \mathbf{M} & 0 \\ 0 & I_0 \mathbf{M} & 0 & 0 & I_1 \mathbf{M} \\ 0 & 0 & I_0 \mathbf{M} & 0 & 0 \\ I_1 \mathbf{M} & 0 & 0 & I_2 \mathbf{M} & 0 \\ 0 & I_1 \mathbf{M} & 0 & 0 & I_2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{S}}^1 \\ \ddot{\mathbf{S}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \\ \mathbf{F}^4 \\ \mathbf{F}^5 \end{Bmatrix} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Hay dưới dạng ma trận thu gọn:

$$\mathbf{K}^e \Delta^e + \mathbf{M}^e \ddot{\Delta}^e = \mathbf{F}^e \quad (2.57)$$

Các thành phần ma trận con trong $\mathbf{K}^{\alpha\beta}$, $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$, \mathbf{F}^α ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5$) có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{1\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right) dx dy, K_{ij}^{2\alpha} = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{3\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} Q_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} Q_{2j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{4\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} M_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} M_{6j}^\alpha + \psi_i^e Q_{1j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{5\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} M_{2j}^\alpha + \psi_i^e Q_{2j}^\alpha \right) dx dy, M_{ij} = \int_{\Omega^e} \psi_i^e \psi_j^e dx dy \\
\alpha' &= - \int_{\Omega^e} N_0 \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy
\end{aligned} \quad (2.58)$$

trong đó các hệ số N_{ij}^α , M_{ij}^α , Q_{ij}^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$; $I = 1, 2, 6$) có dạng:

$$\begin{aligned}
N_{1j}^1 &= A_{11} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, N_{1j}^2 = A_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, N_{1j}^4 = B_{11} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, N_{1j}^5 = B_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \\
N_{2j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, N_{2j}^2 = A_{22} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, N_{2j}^4 = B_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, N_{2j}^5 = B_{22} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \\
N_{6j}^1 &= A_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, N_{6j}^2 = A_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, N_{6j}^4 = B_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, N_{6j}^5 = B_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, M_{1j}^2 = B_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, M_{1j}^4 = D_{11} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, M_{1j}^5 = D_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, M_{2j}^2 = B_{22} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, M_{2j}^4 = D_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, M_{2j}^5 = D_{22} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \\
M_{6j}^1 &= B_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, M_{6j}^2 = B_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, M_{6j}^4 = D_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, M_{6j}^5 = D_{66} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \quad (2.59) \\
N_{1j}^3 &= N_{2j}^3 = N_{6j}^3 = M_{1j}^3 = M_{2j}^3 = M_{6j}^3 = 0, Q_{1j}^3 = H \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, Q_{2j}^3 = H \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, \\
Q_{1j}^4 &= H \psi_j^e, Q_{1j}^5 = Q_{2j}^4 = 0, Q_{2j}^5 = H \psi_j^e, F_i^3 = \int_{\Omega^e} q \psi_i^e dx dy
\end{aligned}$$

với q là tải trọng phân bố theo phương z trên phần tử tấm.

2.6.2.2 Hiện tượng “khóa cắt”

Khi chiều dày của tấm nhỏ hơn nhiều lần kích thước 2 cạnh của tấm, kết quả tính toán độ võng theo lý thuyết tấm Reissner-Mindlin, về mặt lý thuyết, phải trùng với kết quả khi sử dụng lý thuyết tấm Kirchoff. Tuy nhiên, kết quả tính toán số cho thấy độ võng của tấm nhỏ hơn nhiều so với thực tế, hiện tượng này gọi là hiện tượng “khóa cắt” (shear locking). Về mặt lý thuyết, với tấm mỏng, biến dạng cắt γ_{xz} và γ_{yz} bằng 0 ([21]) hay:

$$\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.60)$$

và do đó trong biểu thức năng lượng không tồn tại phần năng lượng do biến dạng cắt. Thành phần năng lượng do biến dạng cắt như sau:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \left[H \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + H \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.61)$$

Hiện tượng “khóa cắt” cho thấy, trong tính toán số, biến dạng cắt γ_{xz} và γ_{yz} không bằng 0 khi chiều dày của tấm mỏng. Ngoài ra, đối với tấm đồng nhất, độ cứng uốn D_{ij} tỉ lệ với h^3 trong khi độ cứng cắt H_{ij} tỉ lệ với h , nên khi chiều dày của tấm mỏng thì hệ số H_{ij} lớn hơn rất nhiều so với D_{ij} . Điều này làm cho phần năng lượng do biến dạng cắt vẫn còn đáng kể trong biểu thức năng lượng của tấm, làm ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

Một cách đơn giản để giải quyết hiện tượng “khóa cắt” là sử dụng kỹ thuật tích phân giảm (reduced integration). Đây là phương pháp sử dụng phép cầu phương Gauss để tính các ma trận thành phần trong phương trình chuyển động theo PP PTHH, trong đó các hệ số chứa H_{ij} được tính với số điểm Gauss ít hơn một bậc so với số điểm Gauss cần thiết. Trong trường hợp với phần tử chữ nhật 4 nút như trên,

các hệ số H_{ij} được tính với 1 điểm Gauss, còn các hệ số còn lại được tính với 2 điểm Gauss.

2.6.2.3 Phương pháp cầu phương Gauss

Việc xác định các ma trận thành phần trong phương trình cân bằng (2.57) cần phải tích phân có dạng sau:

$$I = \int_{\Omega^e} f(x, y) dx dy \quad (2.62)$$

Phương pháp Gauss áp dụng cho các tích phân có cận từ -1 đến +1, do đó tích phân (2.62) được chuyển sang hệ tọa độ tự nhiên của phần tử như sau:

$$I = \int_{\Omega^e} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega^e} f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (2.63)$$

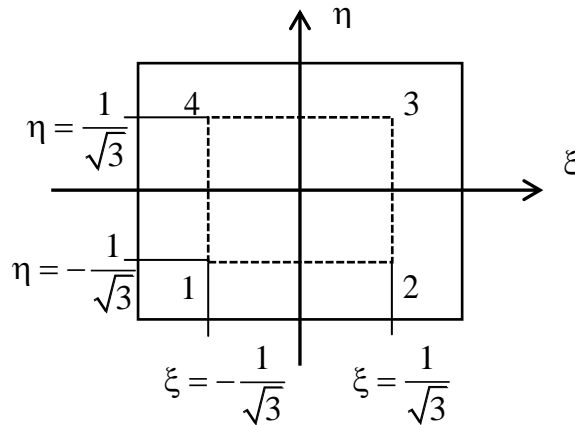
trong đó $|J|$ là định thức ma trận Jacobian và được xác định như sau:

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\eta)(x_2-x_1)+(1+\eta)(x_3-x_4) & (1-\eta)(y_2-y_1)+(1+\eta)(y_3-y_4) \\ (1-\xi)(x_4-x_1)+(1+\xi)(x_3-x_2) & (1-\xi)(y_4-y_1)+(1+\xi)(y_3-y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Theo tích phân Gauss, tích phân (2.58) được xác định:

$$I \approx \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) d\eta \approx \sum_{i=1}^n w_j \sum_{j=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_j) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2.65)$$

trong đó w_i và w_j là trọng số của điểm Gauss thứ i và j , (ξ_i, η_i) là tọa độ điểm Gauss thứ i . Khi sử dụng 1 điểm Gauss, $\xi = \eta = 0$ và $w_i = w_j = 2$. Khi sử dụng 2 điểm Gauss, $w_i = w_j = 1$ và tọa độ điểm Gauss được xác định như **Hình 2.4**.



Hình 2.4: Điểm Gauss theo quy tắc tích phân 2 điểm

2.7 Kết quả số

Trong chương này, một số ví dụ số áp dụng cho tám FGM thông thường (Loại A), tấm sandwich có lõi là FGM, mặt trên và mặt dưới là vật liệu đồng nhất (Loại B), tấm sandwich có lõi là vật liệu đồng nhất, mặt trên và mặt dưới là FGM (Loại C) có kích thước hình chữ nhật (**Hình 2.1**). Tính chất vật liệu của các thành phần như trong **Bảng 2.1**.

Bảng 2.1: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Aluminum (Al)	70	2707	0.3
Aluminum (Al*)	70	2702	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3
Zirconia (ZrO ₂)	151	3000	0.3
Silicon carbide (SiC)	420	3210	0.3
Tungsten carbide (WC)	700	15800	0.3

Biến thiên của môđun đàn hồi, khối lượng riêng theo quy luật lũy thừa (2.2) và hàm mũ (2.5), hệ số Poisson không thay đổi theo chiều dày tấm. Luận án lần lượt khảo sát các bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của tấm FGM và tấm sandwich FGM.

Các đại lượng không thứ nguyên sử dụng cho kết quả lời giải:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(z) &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u_1\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{u}_3 = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} u_3\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
\bar{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \hat{\sigma}_{xx}(z) = \frac{10h^2}{a^2 q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \\
\bar{\sigma}_{xy}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xy}(0, 0, z), \quad \bar{\sigma}_{xz\max} = \frac{h}{a q_0} \sigma_{xz}(0, a/2, 0) \\
\bar{N}_{cr} &= N_{cr} \frac{a^2}{E_m h^3}, \quad \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \\
\bar{K}_w &= \frac{K_w a^4}{D_c}, \quad \bar{K}_s = \frac{K_s a^2}{D_c}, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)} \\
\hat{u}_3 &= \frac{10h E_0}{a^2 q_0} u_3\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad E_0 = 1\text{GPa} \\
\hat{N}_{cr} &= \frac{N_{cr} a^2}{100E_0 h^3}, \quad \hat{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \rho_0 = 1\text{ kg/m}^3
\end{aligned} \tag{2.66}$$

2.7.1 Bài toán tĩnh

Khảo sát giá trị chuyển vị, ứng suất trong và ngoài mặt phẳng của tấm vuông FGM (loại A) với $a/h = 10$ và các hệ số đặc trưng vật liệu (p) khác nhau dưới tác dụng của tải phân bố dạng hình sin. Để khẳng định mức độ tin cậy của lời giải, luận án tiến hành so sánh kết quả phân tích với một số nghiên cứu đã được công bố (Bảng 2.2 và 2.3).

Bảng 2.2: Giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn theo phương pháp giải tích ($a/h = 10, \bar{K}_w = 0, \bar{K}_s = 0$)

p	Tham khảo	$\bar{u}_1(-h/4)$	\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$
1	FSDT 5n	0.6444	0.5734	1.4968	0.6125
	FSDT 4n	0.6444	0.5734	1.4968	0.6125
	HSDT [67]	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109
	TSDT [130]	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111
2	FSDT 5n	0.9033	0.7352	1.4057	0.5459
	FSDT 4n	0.9033	0.7352	1.4057	0.5459
	HSDT [67]	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438
	TSDT [130]	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442
4	FSDT 5n	1.0578	0.8485	1.1922	0.5693
	FSDT 4n	1.0578	0.8485	1.1922	0.5693
	HSDT [67]	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662
	TSDT [130]	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669
8	FSDT 5n	1.0854	0.9322	0.9607	0.5886
	FSDT 4n	1.0854	0.9322	0.9607	0.5886
	HSDT [67]	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850
	TSDT [130]	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858

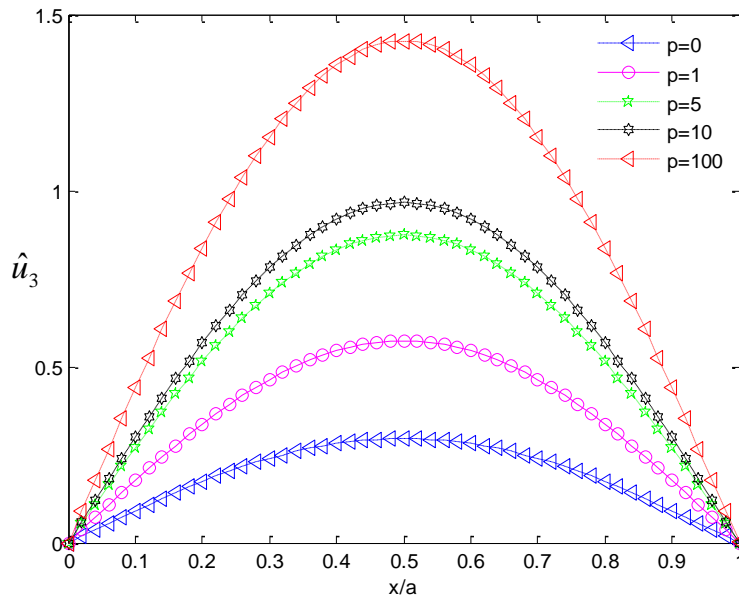
- FSDT 5n: lời giải giải tích của luận án cho bài toán 5 biến
- FSDT 4n: lời giải giải tích của luận án cho bài toán 4 biến

Bảng 2.3: Giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông theo PP PTHH ($a/h = 100, \bar{K}_w = 0, \bar{K}_s = 0$)

p	Tham khảo	SSSS		CCCC	
		\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xz\max}$	\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xz\max}$
Gồm	PP PTHH	0.4044	0.5042	0.1253	0.6592
	FSDT [36]	0.4064	0.5067	0.1267	0.6666
0.5	PP PTHH	0.6277	0.5318	0.1944	0.6945
	FSDT [36]	0.6269	0.5311	0.1955	0.6984
1	PP PTHH	0.8110	0.5375	0.2511	0.6983
	FSDT [36]	0.8154	0.5404	0.2542	0.7069
1.5	PP PTHH	0.9472	0.5350	0.2933	0.6982
	FSDT [36]	0.9525	0.5380	0.2970	0.7074
2	PP PTHH	1.0393	0.5276	0.3218	0.6873
	FSDT [36]	1.0449	0.5304	0.3258	0.6958
3	PP PTHH	1.1419	0.5111	0.3536	0.6673
	FSDT [36]	1.1482	0.5139	0.3580	0.6756
3.3	PP PTHH	1.1608	0.5070	0.3595	0.6619
	FSDT [36]	1.1672	0.5098	0.3640	0.6702
4	PP PTHH	1.1944	0.4992	0.3699	0.6517
	FSDT [36]	1.2011	0.5020	0.3746	0.6600
5	PP PTHH	1.2289	0.4915	0.3806	0.6418
	FSDT [36]	1.2359	0.4943	0.3854	0.6499
10	PP PTHH	1.3489	0.4762	0.4178	0.6216
	FSDT [36]	1.3569	0.4790	0.4233	0.6298
20	PP PTHH	1.5222	0.4692	0.4716	0.6127
	FSDT [36]	1.5362	0.4735	0.4792	0.6226
Kim loại	PP PTHH	2.1213	0.4874	0.6317	0.6120
	FSDT [36]	2.2064	0.5070	0.6881	0.6666

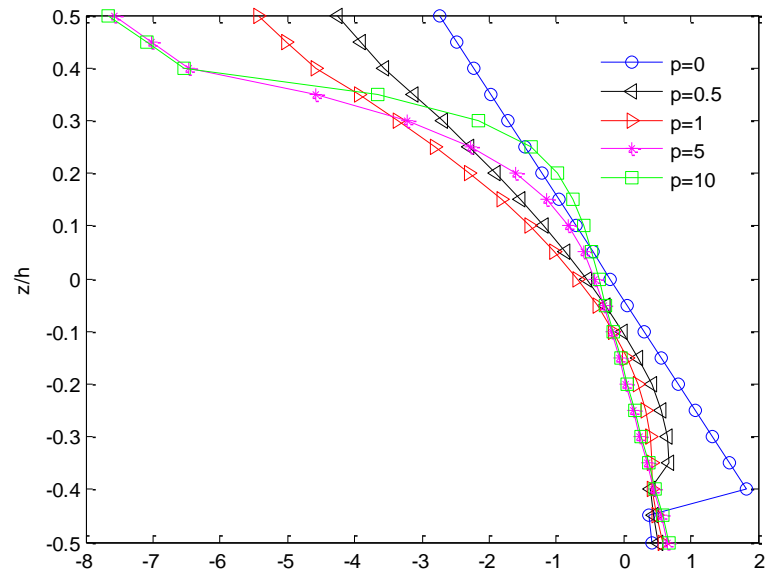
PP PTHH: lời giải của luận án sử dụng PP PTHH 5n

Sau khi kiểm tra kết quả lời giải của tấm FGM thông thường (loại A), luận án tiến hành khảo sát trường chuyển vị phân bố theo chiều dài tấm ứng với các hệ số đặc trưng vật liệu khác nhau. Kết quả nhận thấy: khi hệ số đặc trưng vật liệu (p) càng tăng thì độ võng trong tấm càng lớn, điều này là hoàn toàn phù hợp khi mật độ ceramic trong tấm giảm dần ảnh hưởng đến độ cứng trong tấm nên chuyển vị vì thế tăng theo giá trị p (**Hình 2.5**).

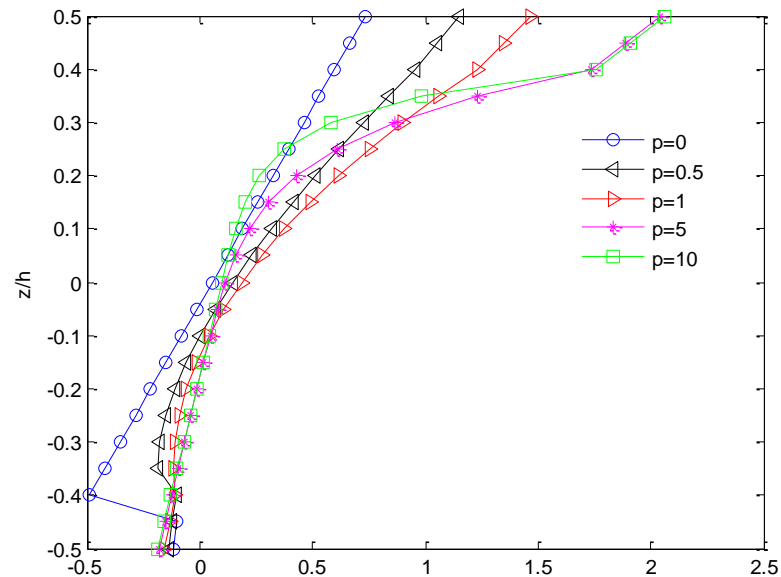


Hình 2.5: Giá trị chuyển vị (\hat{u}_3) của tấm FGM thông thường (loại A, Al^*/Al_2O_3 , $a/h = 10$ và tải phân bố hình sin)

Tương tự, **Hình 2.6** thể hiện giá trị ứng suất màng phân bố theo chiều dày tấm cho trường hợp tấm sandwich FGM (loại B) khi thay đổi dần hệ số đặc trưng vật liệu. Cuối cùng, trong phần này luận án phân tích chuyển vị của tấm sandwich FGM (loại C) cho cả hai loại hàm mật độ thể tích (PGM và EGM) được thể hiện như **Hình 2.7**. Mô hình sử dụng độ cứng cắt cải tiến (H) được so sánh với lời giải sử dụng hệ số điều chỉnh cắt $\kappa^s = 5/6$. Kết quả cho thấy: giá trị chuyển vị của luận án lớn hơn so với tính toán truyền thống trong trường hợp tấm lõi cứng và ngược lại cho trường hợp tấm lõi mềm.

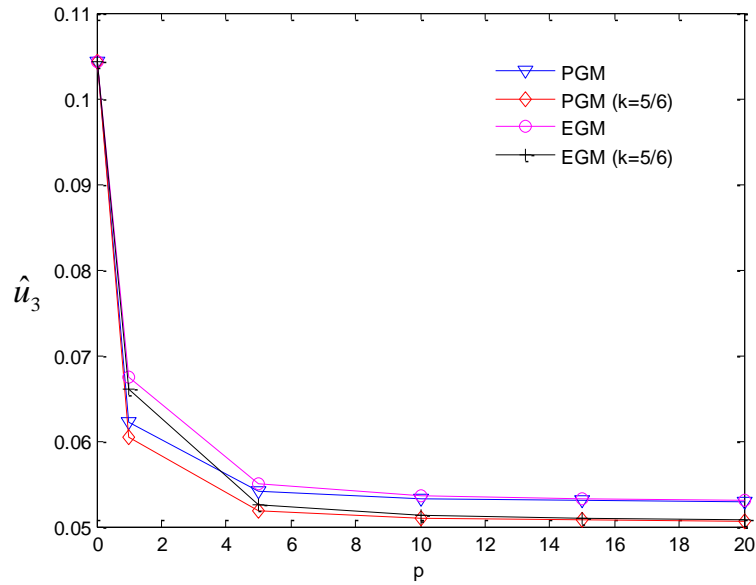


(a) $(\bar{\sigma}_{xx})$

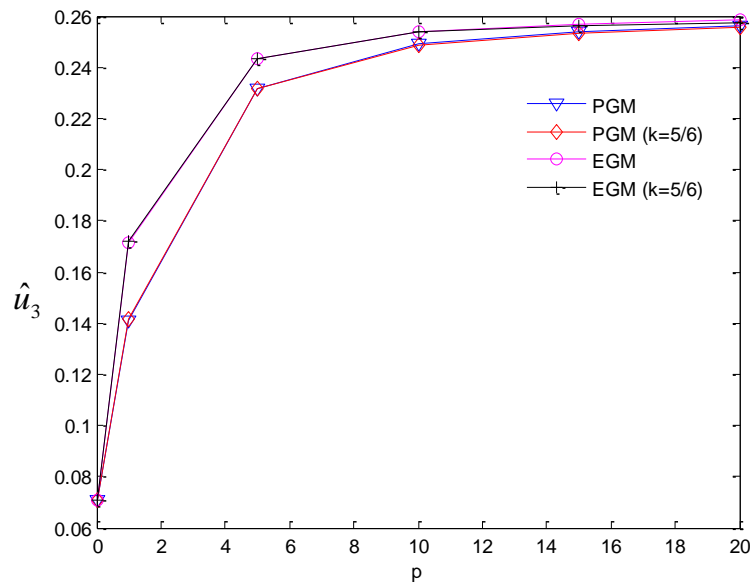


(b) $(\bar{\sigma}_{xy})$

Hình 2.6: Giá trị ứng suất của tấm (1-8-1) FG sandwich (loại B, Al*/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)



(a) Lỗi mềm



(b) Lỗi cứng

Hình 2.7: Giá trị chuyển vị (\hat{u}_3) của tấm (1-2-1) FG sandwich (loại C, Al*/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

2.7.2 Bài toán ổn định

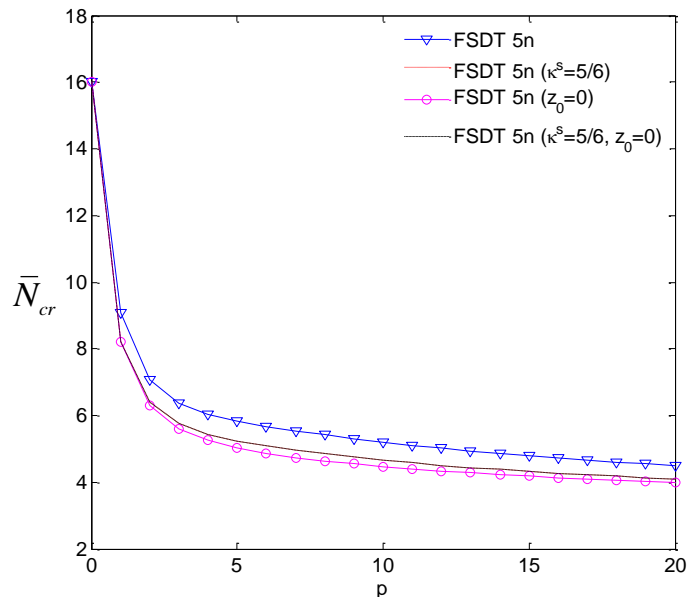
Trong phần này, tính chính xác của lời giải cũng được khẳng định thông qua so sánh với nhóm tác giả Mohammadi và cộng sự [131] cho tấm FGM (loại A) với các phương lực khác nhau: ổn định nén 1 phương ($R_1 = -1, R_2 = 0$), ổn định nén 2 phương ($R_1 = -1, R_2 = -1$) và ổn định của tấm với 1 phương nén và 1 phương kéo ($R_1 = -1, R_2 = 1$) cho trường hợp áp dụng hệ số điều chỉnh cắt cải tiến kết hợp mặt

trung hoà vật lý và trường hợp sử dụng lại hệ số điều chỉnh cắt $\kappa^s = 5/6$ và không xét ảnh hưởng của mặt trung hoà vật lý (**Bảng 2.4**).

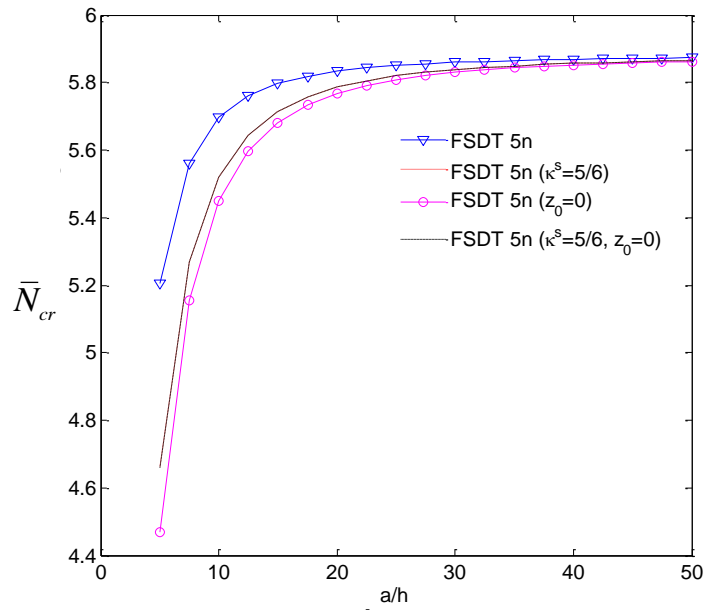
Bảng 2.4: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

(R_1, R_2)	Phương pháp	P							
		0	0.5	1	2	5	10	20	100
(-1,-1)	FSDT 5n	9.2889	6.2019	4.7960	3.7405	3.1448	2.8478	2.5002	1.9297
	FSDT 5n ($\kappa^s=5/6, z_0=0$)	9.2889	6.0545	4.6694	3.6415	3.0509	2.7598	2.4340	1.9110
	FSDT [131]	9.2893	6.0615	4.6694	3.6315	3.0177	2.7264	2.4173	1.9099
(-1,0)	FSDT 5n	18.5778	12.4039	9.5921	7.4811	6.2896	5.6955	5.0004	3.8594
	FSDT 5n ($\kappa^s=5/6, z_0=0$)	18.5778	12.1090	9.3388	7.2830	6.1017	5.5195	4.8680	3.8219
	FSDT [131]	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	4.8346	3.8198
(-1,1)	FSDT 5n	35.8342	24.9281	19.4175	15.1331	12.6168	11.3308	9.8666	7.5014
	FSDT 5n ($\kappa^s=5/6, z_0=0$)	35.8342	23.5411	18.2173	14.1959	11.7469	10.5290	9.2697	7.3339
	FSDT [131]	35.8416	23.5920	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468	9.1281	7.3263

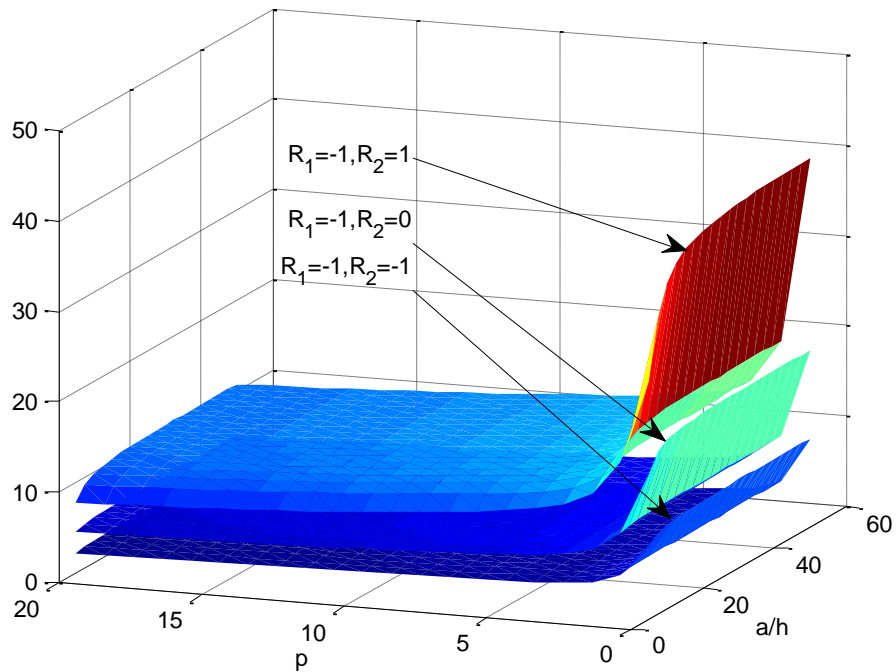
Khảo sát sự ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) (**Hình 2.8**), sự ảnh hưởng của chiều dày tỉ đối (a/h) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) (**Hình 2.9**), sự ảnh hưởng của chiều dày tỉ đối (a/h) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với các lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) khác nhau (**Hình 2.10**), sự ảnh hưởng của chiều dày tỉ đối (a/h) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) cho các loại vật liệu khác nhau (**Hình 2.11**) của tấm FGM (loại A).



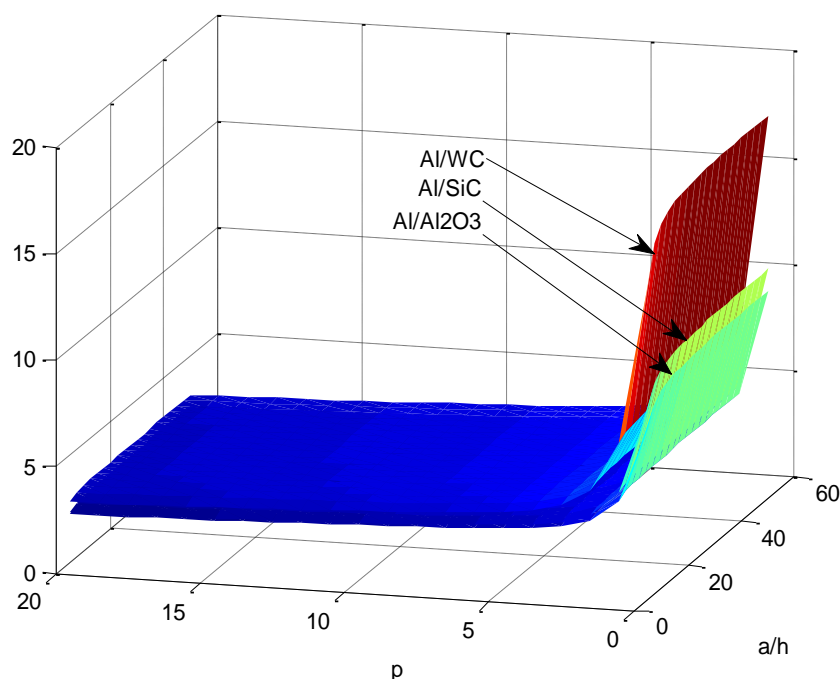
Hình 2.8: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10, R_1 = -1, R_2 = 0$)



Hình 2.9: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($p = 10, R_1 = -1, R_2 = 0$)

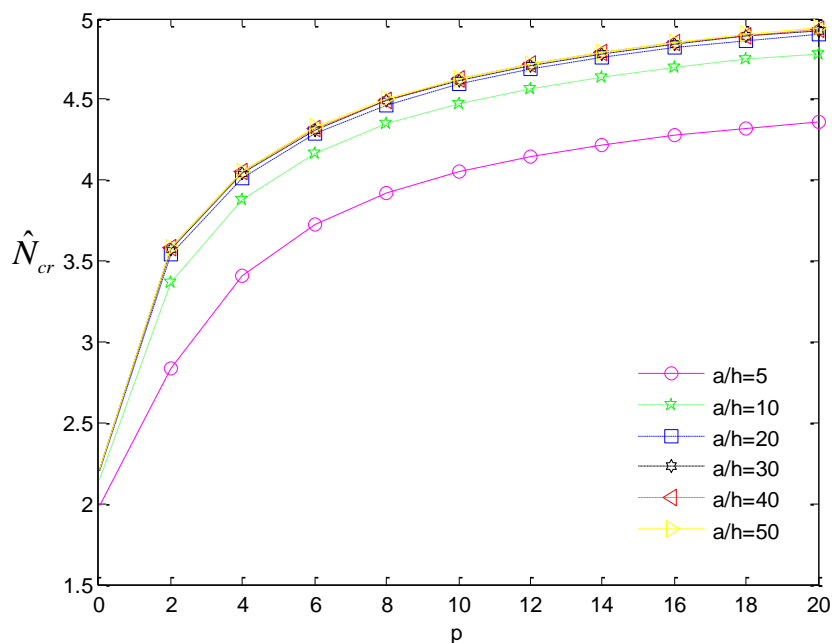


Hình 2.10: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn

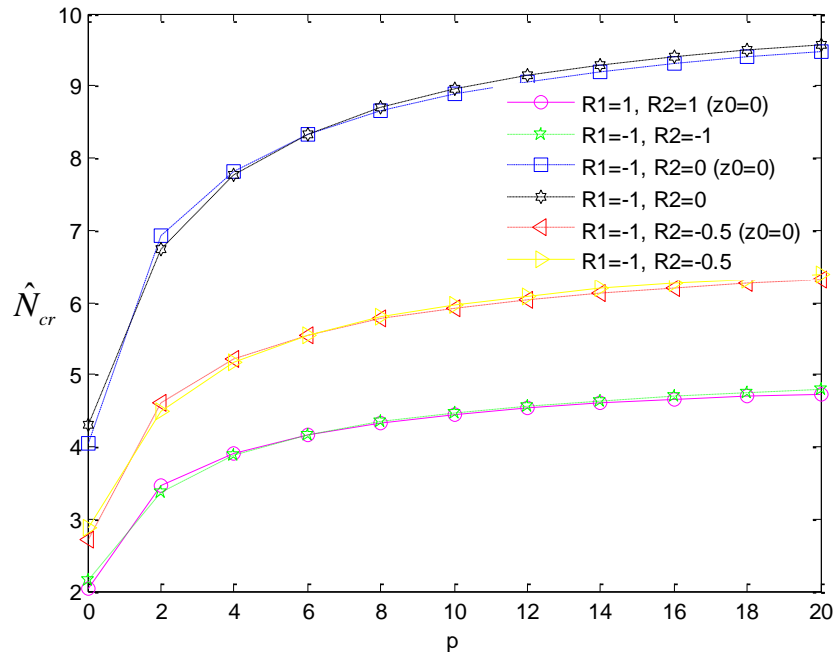


Hình 2.11: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn với các loại vật liệu khác nhau ($R_1 = -1, R_2 = -1$)

Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) cũng được xét sự ảnh hưởng do thay đổi hệ số đặc trưng vật liệu và tỉ số giữa cạnh trên chiều dày tấm (**Hình 2.12**). Bên cạnh đó, trong **Hình 2.13** thể hiện lực tới hạn ứng với trường hợp xét và không xét ảnh hưởng của mặt trung hoà vật lý.



Hình 2.12: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (loại B, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($R_1 = -1, R_2 = -1, z_0 \neq 0$)



Hình 2.13: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (loại B, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

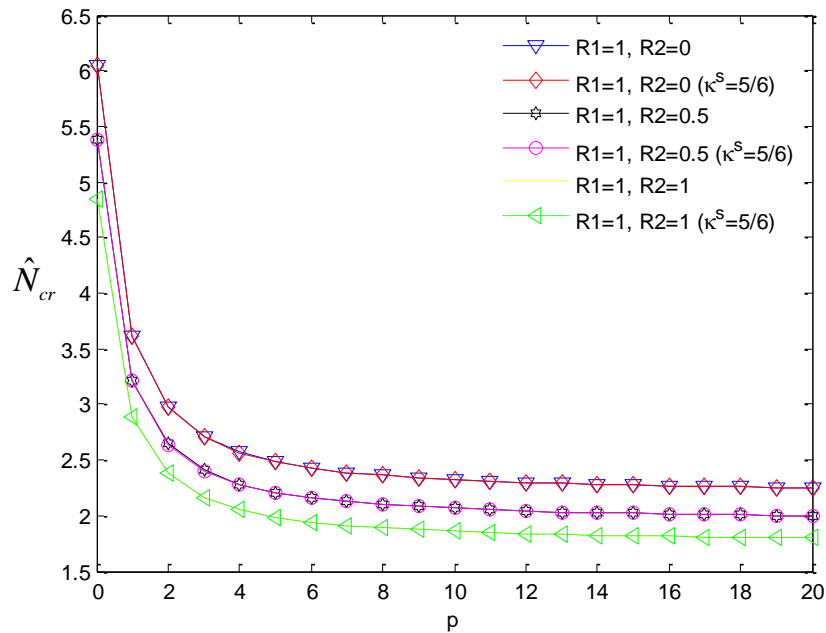
Kết quả phân tích lực tới hạn tấm loại C được kiểm chứng thông qua so sánh với lời giải sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và Quasi-3D. Nhận thấy: kết quả nghiên cứu của luận án khá phù hợp với các nghiên cứu này (**Bảng 2.5**).

Bảng 2.5: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10, R_1 = -1, R_2 = -1$)

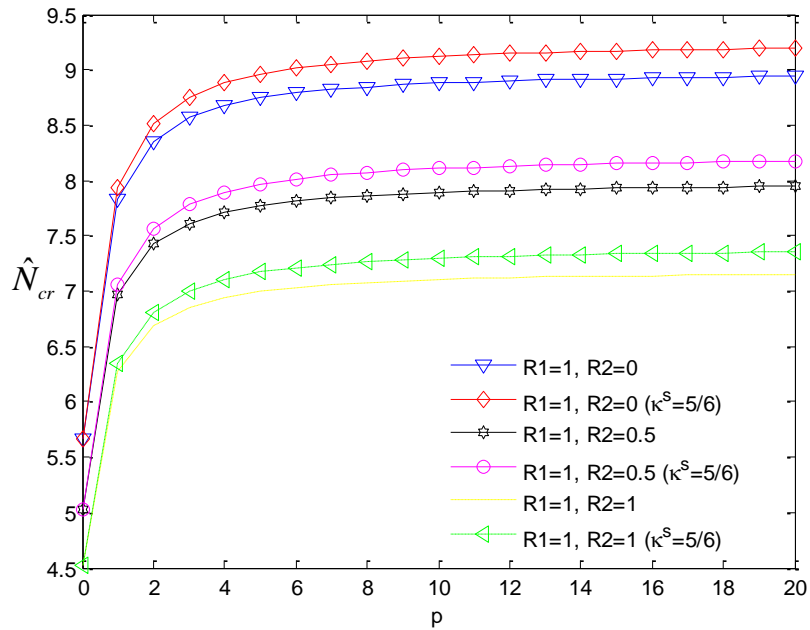
p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	FSDT 5n	6.50224	6.50224	6.50224	6.50224	6.50224	6.50224
	Zenkour [132] (TPT)	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	Zenkour [132] (SPT)	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303
	Meiche et al [133] (HPT)	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276
	Neves et al [133] (HSPT)	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652
0.5	FSDT 5n	3.67679	3.96622	4.10823	4.21480	4.40145	4.60566
	Zenkour [132] (TPT)	3.68219	3.97042	4.11235	4.21823	4.40499	4.60841
	Zenkour [132] (SPT)	3.68284	3.97097	4.11269	4.21856	4.40519	4.60835
	Meiche et al [133] (HPT)	3.68190	3.97023	4.11236	4.21823	4.40514	4.60878
	Neves et al [133] (HSPT)	3.59354	3.87157	4.00853	4.11071	4.29073	4.48676
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	3.58096	3.85809	3.99480	4.09641	4.27592	4.47110
1.0	FSDT 5n	2.58239	2.91934	3.09595	3.23203	3.47425	3.75279
	Zenkour [132] (TPT)	2.58357	2.92003	3.09697	3.23237	3.47472	3.75328
	Zenkour [132] (SPT)	2.58423	2.92060	3.09731	3.23270	3.47490	3.75314
	Meiche et al [133] (HPT)	2.58315	2.91970	3.09686	3.23225	3.47476	3.75359
	Neves et al [133] (HSPT)	2.53913	2.86503	3.03679	3.16779	3.40280	3.67204
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	2.53062	2.85563	3.02733	3.15750	3.39207	3.66013
5.0	FSDT 5n	1.32080	1.51412	1.69229	1.78553	2.05119	2.36523
	Zenkour [132] (TPT)	1.32910	1.52129	1.70176	1.78978	2.05605	2.36734
	Zenkour [132] (SPT)	1.33003	1.52203	1.70224	1.79032	2.05644	2.36744
	Meiche et al [133] (HPT)	1.32839	1.52071	1.70140	1.78937	2.05578	2.36731

	Neves et al [133] (HSPT)	1.32331	1.50935	1.68594	1.77072	2.03078	2.33036
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	1.31829	1.50409	1.68128	1.76507	2.02534	2.32354
10	FSDT 5n	1.23333	1.36115	1.53014	1.58975	1.84504	2.13645
	Zenkour [132] (TPT)	1.24363	1.37316	1.54595	1.59736	1.85376	2.13995
	Zenkour [132] (SPT)	1.24475	1.37422	1.56721	1.59728	1.57287	2.19087
	Meiche et al [133] (HPT)	1.24287	1.37249	1.54556	1.59687	1.85343	2.13982
	Neves et al [133] (HSPT)	1.24090	1.36547	1.53468	1.58421	1.83573	2.10897
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	1.23599	1.36044	1.53036	1.57893	1.83083	2.10275

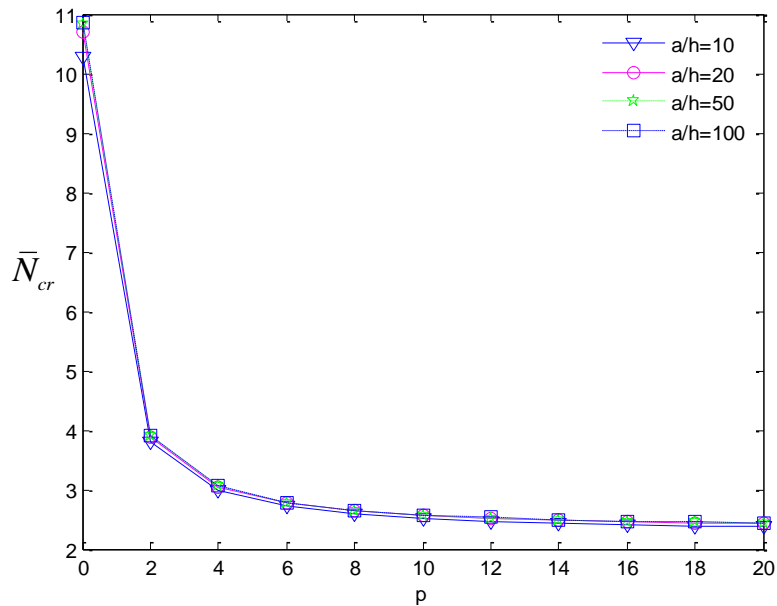
Ngoài ra, ảnh hưởng do hệ số đặc trưng vật liệu (p) trong trường hợp tấm lõi cứng (**Hình 2.14**) và tấm lõi mềm (**Hình 2.15**) khi xét trường hợp sử dụng độ cứng cắt cải tiến (H) và cho trường hợp đối với độ cứng cắt sử dụng hệ số điều chỉnh cắt $\kappa^s = 5/6$ khi phân tích tấm hình chữ nhật tựa đơn. Bên cạnh đó, ảnh hưởng của tỉ số cạnh trên chiều dày tấm (a/h), tỉ lệ hai cạnh (a/b) khi thay đổi hệ số đặc trưng vật liệu lần lượt được thể hiện trong hình **Hình 2.16** và **Hình 2.17**.



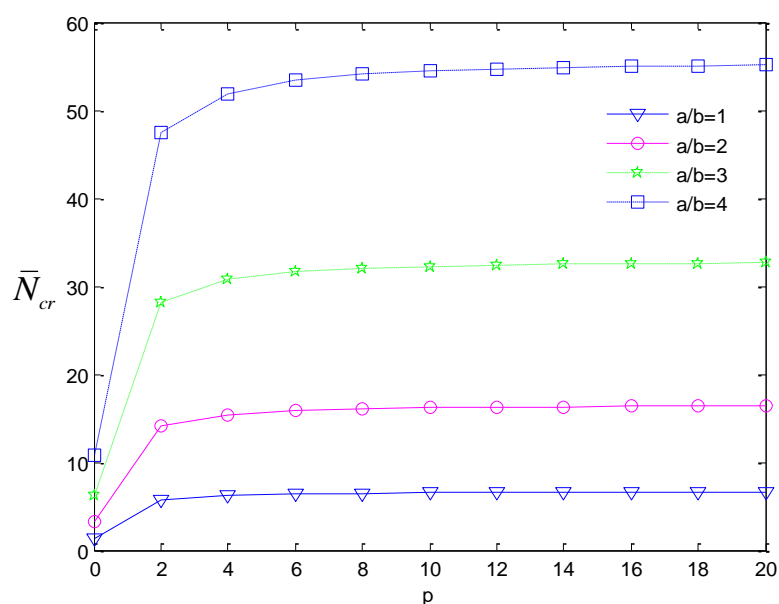
Hình 2.14: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-2-1) sandwich FGM (loại C, lõi cứng, Al^*/Al_2O_3) hình chữ nhật ($a = 2b$, $a/h = 10$)



Hình 2.15: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm (1-2-1) sandwich FGM (loại C, lõi mềm, Al^*/Al_2O_3) hình chữ nhật ($a = 2b, a/h = 10$)



Hình 2.16: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm (1-1-1) sandwich FGM (loại C, Al/Al_2O_3) hình vuông cho trường hợp (lõi cứng)



Hình 2.17: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm (1-1-1) sandwich FGM (loại C, Al/Al₂O₃) cho trường hợp (lõi mềm, $a/h = 100$)

2.7.3 Bài toán dao động tự do

Để khẳng định kết quả nghiên cứu của phần này, luận án tiến hành so sánh kết quả lời giải với các trường hợp khác nhau (xét và không xét ảnh hưởng của mặt trung hoà vật lý, cũng như thử lại hệ số hiệu chỉnh cắt $\kappa^s = 5/6$) và so sánh với nghiên cứu của Hashemi và cộng sự [135] của tấm FGM (loại A) cho các trường hợp tỉ số cạnh trên chiều dày tấm thay đổi ứng với các dạng dao động đầu tiên (**Bảng 2.6**).

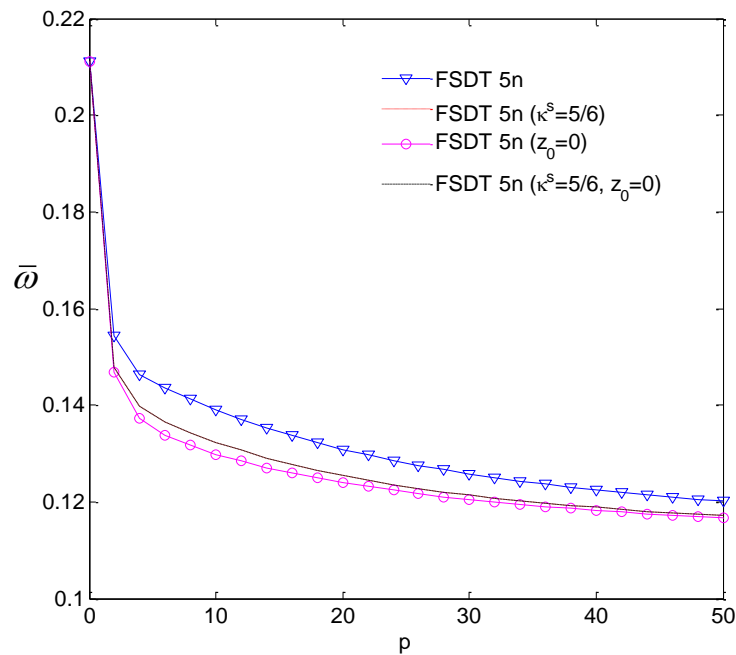
Bảng 2.6: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn

a/h	Mode (m,n)	Phương pháp	P				
			0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	FSDT 5n	0.0577	0.0496	0.0448	0.0388	0.0371
		FSDT 5n ($\kappa^s=5/6$)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		FSDT 5n ^a	0.0577	0.0490	0.0442	0.0380	0.0364
		FSDT 5n ^a ($\kappa^s=5/6$)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		FSDT [135]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	2(1,2)	FSDT 5n	0.1376	0.1204	0.1091	0.0940	0.0897
		FSDT 5n ($\kappa^s=5/6$)	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		FSDT 5n ^a	0.1376	0.1174	0.1059	0.0901	0.0856
		FSDT 5n ^a ($\kappa^s=5/6$)	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		FSDT [135]	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
	3(2,2)	FSDT 5n	0.2112	0.1877	0.1704	0.1463	0.1391
		FSDT 5n ($\kappa^s=5/6$)	0.2112	0.1804	0.1631	0.1397	0.1324
		FSDT 5n ^a	0.2112	0.1807	0.1631	0.1374	0.1299
		FSDT 5n ^a ($\kappa^s=5/6$)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		FSDT [135]	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
20	1(1,1)	FSDT 5n	0.0148	0.0126	0.0113	0.0099	0.0095
		FSDT 5n ($\kappa^s=5/6$)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT 5n ^a	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT 5n ^a ($\kappa^s=5/6$)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT [135]	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

2 (1,2)	FSDT [135]	0.0148	0.0128	0.0115	0.0101	0.0096
	FSDT 5n	0.0365	0.0312	0.0282	0.0244	0.0234
	FSDT 5n ($\kappa^s=5/6$)	0.0365	0.0310	0.0279	0.0242	0.0232
	FSDT 5n ^a	0.0365	0.0310	0.0279	0.0241	0.0231
	FSDT 5n ^a ($\kappa^s=5/6$)	0.0365	0.0310	0.0279	0.0242	0.0232
3 (2,2)	FSDT [135]	0.0365	0.0310	0.0279	0.0244	0.0234
	FSDT 5n	0.0577	0.0496	0.0448	0.0388	0.0371
	FSDT 5n ($\kappa^s=5/6$)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	FSDT 5n ^a	0.0577	0.0490	0.0442	0.0380	0.0364
	FSDT 5n ^a ($\kappa^s=5/6$)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	FSDT [135]	0.0577	0.0490	0.0442	0.0384	0.0368

(a): trường hợp có xét đến mặt trung hoà vật lý.

Khảo sát sự ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với tần số dao động riêng của tấm ($\bar{\omega}$) được trình bày trong **Hình 2.18**. Từ hình vẽ này, tác giả nhận thấy: kết quả nghiên cứu của luận án lớn hơn so với các nghiên cứu truyền thống, điều này chứng tỏ tính tối ưu của lời giải phân tích tần số dao động riêng của kết cấu tấm.



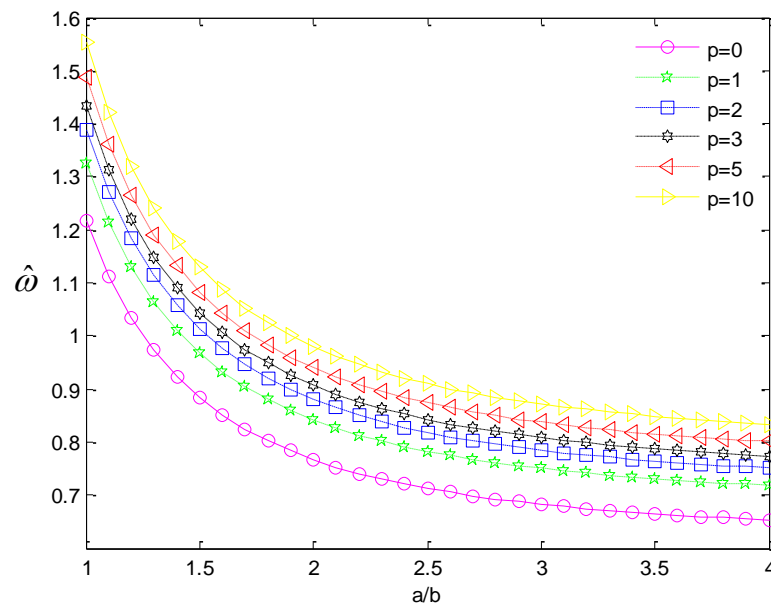
Hình 2.18: Giá trị tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 5$)

Tương tự, trong phần phân tích dao động cho tấm loại B tác giả cũng tiến hành so sánh kết quả nghiên cứu của luận án với các lời giải sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và bậc cao ([136], **Bảng 2.7**). Trong một số trường hợp kết quả luận án rất gần với lời giải sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao này.

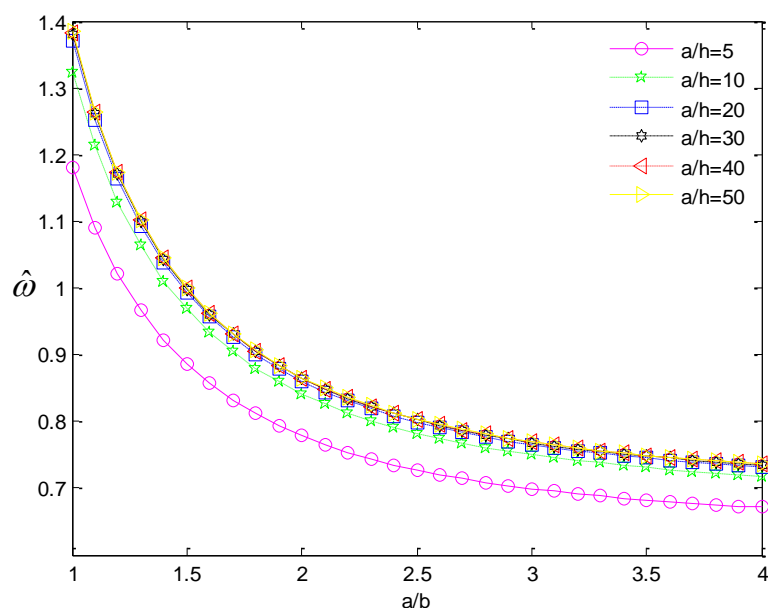
Bảng 2.7: Giá trị tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại B) hình vuông tựa đơn

a/h	Tham khảo	1-1-1			1-2-1			2-2-1		
		0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	FSDT 5n	1.1414	1.1561	1.1996	1.1574	1.1827	1.2569	1.1916	1.2268	1.3160
	FSDT [136]	1.1503	1.1642	1.2050	1.1660	1.1880	1.2567	1.1950	1.2299	1.3173
	HSDT9 [136]	1.1449	1.1639	1.2113	1.1597	1.1884	1.2644	1.1965	1.2350	1.3249
	HSDT11 [136]	1.1512	1.1705	1.2184	1.1664	1.1953	1.2718	1.2034	1.2422	1.3326
	HSDT13 [136]	1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
10	FSDT 5n	1.2355	1.2488	1.2902	1.2573	1.2778	1.3483	1.2839	1.3212	1.4153
	FSDT [136]	1.2394	1.2509	1.2903	1.2601	1.2786	1.3469	1.2842	1.3201	1.4136
	HSDT9 [136]	1.2373	1.2506	1.2921	1.2578	1.2785	1.3492	1.2846	1.3216	1.4161
	HSDT11 [136]	1.2392	1.2525	1.2942	1.2598	1.2806	1.3515	1.2866	1.3238	1.4184
	HSDT13 [136]	1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
100	FSDT 5n	1.2752	1.2854	1.3238	1.2984	1.3147	1.3824	1.3198	1.3558	1.4518
	FSDT [136]	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4518
	HSDT9 [136]	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	HSDT11 [136]	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	HSDT13 [136]	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519

Luận án cũng khảo sát sự ảnh hưởng của tỉ lệ hai cạnh, hệ số đặc trưng vật liệu và tỉ số giữa cạnh trên chiều dày tấm trong trường hợp này (**Hình 2.19, 2.20**)



Hình 2.19: Giá trị tần số dao động riêng ($\hat{\omega}$) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (loại B, Al/Al₂O₃) hình chữ nhật ($a/h = 10$)



Hình 2.20: Giá trị tần số dao động riêng ($\hat{\omega}$) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (loại B, Al/Al₂O₃) hình chữ nhật ($p = 1$)

Cuối cùng, trong phần phân tích tần số dao động riêng của tấm loại C, luận án cũng so sánh kết quả nghiên cứu của luận án với nhóm tác giả Bessaim và cộng sự (dùng lời giải Quasi-3D [137]) và nhóm tác giả Li và cộng sự (dùng lời giải chính xác 3D [138]). Nhìn chung, kết quả nghiên cứu của luận án là khá ấn tượng khi so sánh với các nhóm tác giả này (**Bảng 2.8** và **2.9**).

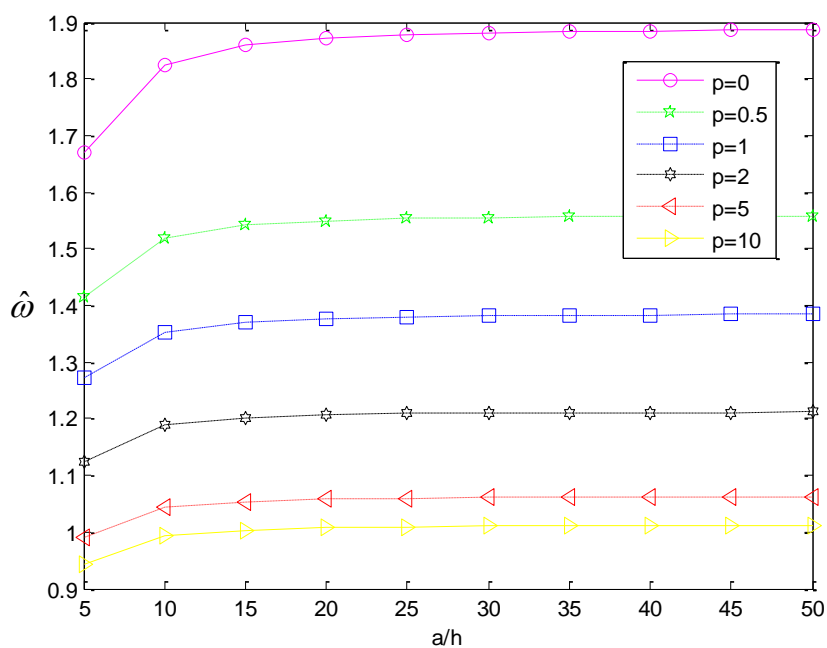
Bảng 2.8: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	FSDT 5n	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
	Li et al (3D) [138]	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
1	FSDT 5n	1.24294	1.29998	1.35328	1.39558	1.43927
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.24495	1.30195	1.35527	1.39987	1.44143
	Li et al (3D) [138]	1.24470	1.30181	1.35523	1.39763	1.44137
5	FSDT 5n	0.94311	0.97960	1.04347	1.10771	1.17348
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	0.94716	0.98311	1.04613	1.11723	1.17579
	Li et al (3D) [138]	0.94476	0.98103	1.04532	1.10983	1.17567
10	FSDT 5n	0.92464	0.93896	0.99321	1.05866	1.12226
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	0.92952	0.94410	0.99684	1.07015	1.12486
	Li et al (3D) [138]	0.92727	0.94078	0.99523	1.06104	1.12466

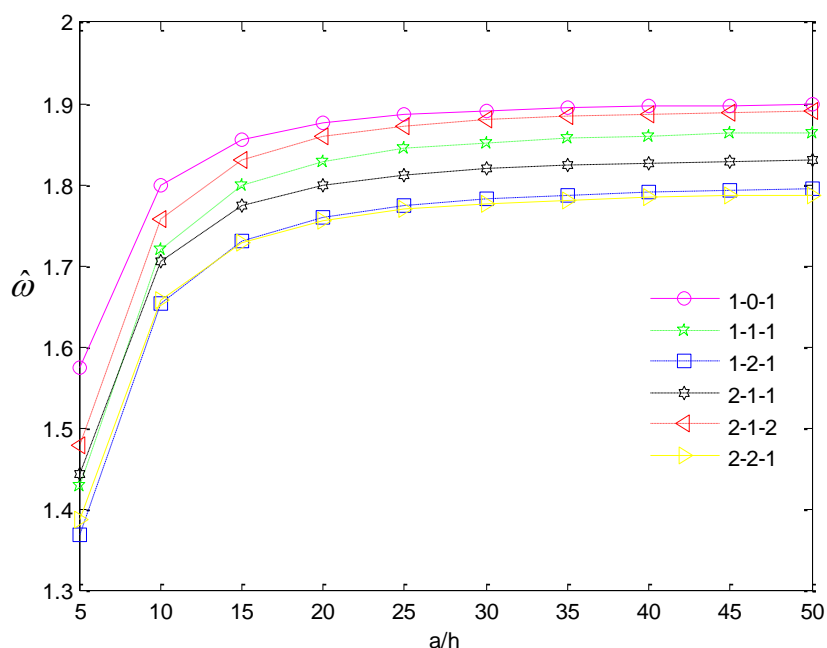
Bảng 2.9: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi mềm) hình vuông ($a/h=10$)

p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	FSDT 5n	0.92775	0.92775	0.92775	0.92775	0.92775
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897
	Li et al (3D) [138]	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897
1	FSDT 5n	1.71619	1.66822	1.62652	1.56650	1.55414
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.72814	1.68625	1.64199	1.58430	1.56301
	Li et al (3D) [138]	1.72227	1.67437	1.63053	1.57037	1.55788
5	FSDT 5n	1.83222	1.79962	1.77215	1.71157	1.71736
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.84465	1.84456	1.82032	1.75972	1.75143
	Li et al (3D) [138]	1.84198	1.82611	1.78956	1.72726	1.72670
10	FSDT 5n	1.83231	1.80483	1.78266	1.72538	1.73573
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.84113	1.85489	1.83973	1.78163	1.77878
	Li et al (3D) [138]	1.84020	1.83987	1.80813	1.74779	1.74811

Xét ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu, tỉ số cạnh trên chiều dày tấm và cấu trúc các phân lớp trong tấm đến tần số dao động của tấm FG sandwich loại C cho trường hợp lõi cứng và lõi mềm (**Hình 2.21** và **2.22**).



Hình 2.21: Giá trị tần số dao động riêng ($\hat{\omega}$) của tấm (1-1-1) sandwich FGM (loại C, Al/Al₂O₃) hình vuông cho trường hợp (lõi cứng, $p=10$)



Hình 2.22: Giá trị tần số dao động riêng ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (loại C, Al/Al₂O₃) hình vuông cho trường hợp (lõi mềm, $p = 10$)

2.8 Kết luận

Một hệ số hiệu chỉnh cắt cải tiến được áp dụng cho lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có xét đến ảnh hưởng của vị trí mặt trung hòa vật lý, hiệu ứng nền và đơn giản số biến số của trường chuyển vị để phân tích bài toán tĩnh, bài toán ổn định và bài toán dao động tự do của tấm FGM và tấm composite FGM khi dùng lời giải giải tích (Navier) và PP PTHH. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải theo lý thuyết FSDT, HSDT, Quasi-3D và kể cả lời giải chính xác 3D của nhiều tác giả ứng với nhiều dạng bài toán khác nhau.
- Khi phân tích chuyển vị, lực tới hạn và tần số dao động trong tấm, kết quả của luận án có sự vượt trội so với các phương pháp nghiên cứu truyền thống khi sử dụng cùng loại lý thuyết FSDT. Điều này chứng tỏ tính hợp lý của luận án trong việc phân tích các loại bài toán này.
- Hiệu ứng của mặt trung hòa vật lý đến hệ số hiệu chỉnh cắt và các đáp ứng tấm FGM đề xuất trong luận án đã được làm rõ.
- Phương pháp giảm bớt số ẩn số của phương trình đặc trưng giúp đơn giản hoá các bước tính toán và lập trình.
- PP PTHH của luận án đã giải quyết được hiện tượng khoá cắt khi phân tích bài toán tĩnh theo FSDT.

CHƯƠNG 3

MÔ HÌNH TẤM CHỨC NĂNG SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO

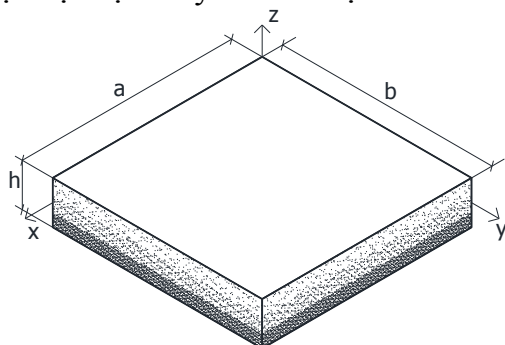
3.1 Giới thiệu

Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSĐT) là phần mở rộng và phát triển của nhóm lý biến dạng cắt. Điểm nổi bật của lý thuyết này là khắc phục nhược điểm của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, đó là không cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt để xác định các thành phần ứng suất cắt trong tấm. Tuy nhiên, tính chính xác và mức độ hiệu quả của phương pháp phụ thuộc vào việc chọn hàm biến dạng cắt. Mục tiêu của chương là đề xuất một lý thuyết biến dạng cắt mới để phân tích bài toán tĩnh, ổn định và dao động cho các kết cấu tấm phân lớp chức năng (FGM) khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Trong chương này lần lượt trình bày các vấn đề: thiết lập trường biến dạng và động học, phương trình năng lượng (nguyên lý biến phân Hamilton và nguyên lý Lagrange), phương pháp tính toán sử dụng lời giải giải tích (Navier và Ritz) từ hàm biến dạng cắt mới do luận án đề xuất, kết quả tính toán số. Cuối cùng là những kết luận và những so sánh với các nghiên cứu đã được công bố.

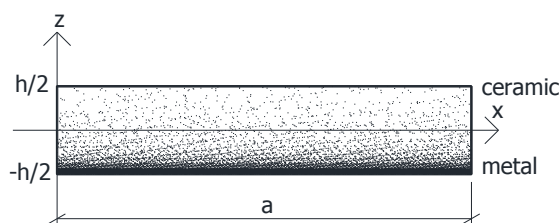
3.2 Trường biến dạng và động học

3.2.1 Mô hình và đặc trưng vật liệu tấm FGM

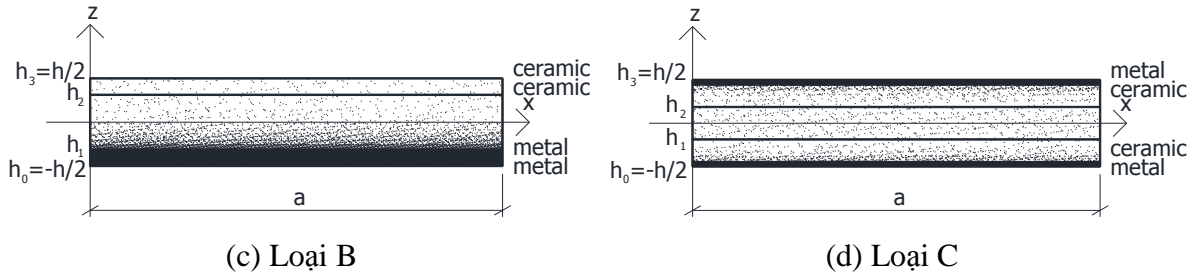
Tấm FGM hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều cao là h như **Hình 3.1** được chế tạo từ gốm (ceramic) và kim loại (metal) có các đặc tính hữu hiệu vật liệu thay đổi liên tục theo chiều dày tấm theo quy luật lũy thừa và hàm mũ.



(a) Mô hình tấm



(b) Loại A



Hình 3.1: Mô hình tấm FGM

Đặc trưng hữu hiệu của tấm được xác định theo quy luật hàm lũy thừa [2] (PGM):

$$P^{(j)}(z) = (P_c - P_m)V_c^{(j)}(z) + P_m \quad (3.1)$$

trong đó P_c và P_m là môđun đàn hồi (E), hệ số Poisson (ν), khối lượng thể tích (ρ) của vật liệu gốm và kim loại. V_c là hàm mật độ thể tích thay đổi theo quy luật lũy thừa hệ số mũ tùy thuộc vào từng loại tấm (**Hình 3.2**):

- Tấm loại A: được chế tạo từ kim loại và gốm với hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) (**Hình 3.1b**):

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \quad (3.2)$$

với p là hệ số đặc trưng vật liệu, h là chiều dày tấm.

- Tấm loại B: là tấm composite với lớp trên là gốm, lớp dưới được chế tạo từ kim loại, và lõi giữa được làm từ kim loại và gốm (**Hình 3.1c**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

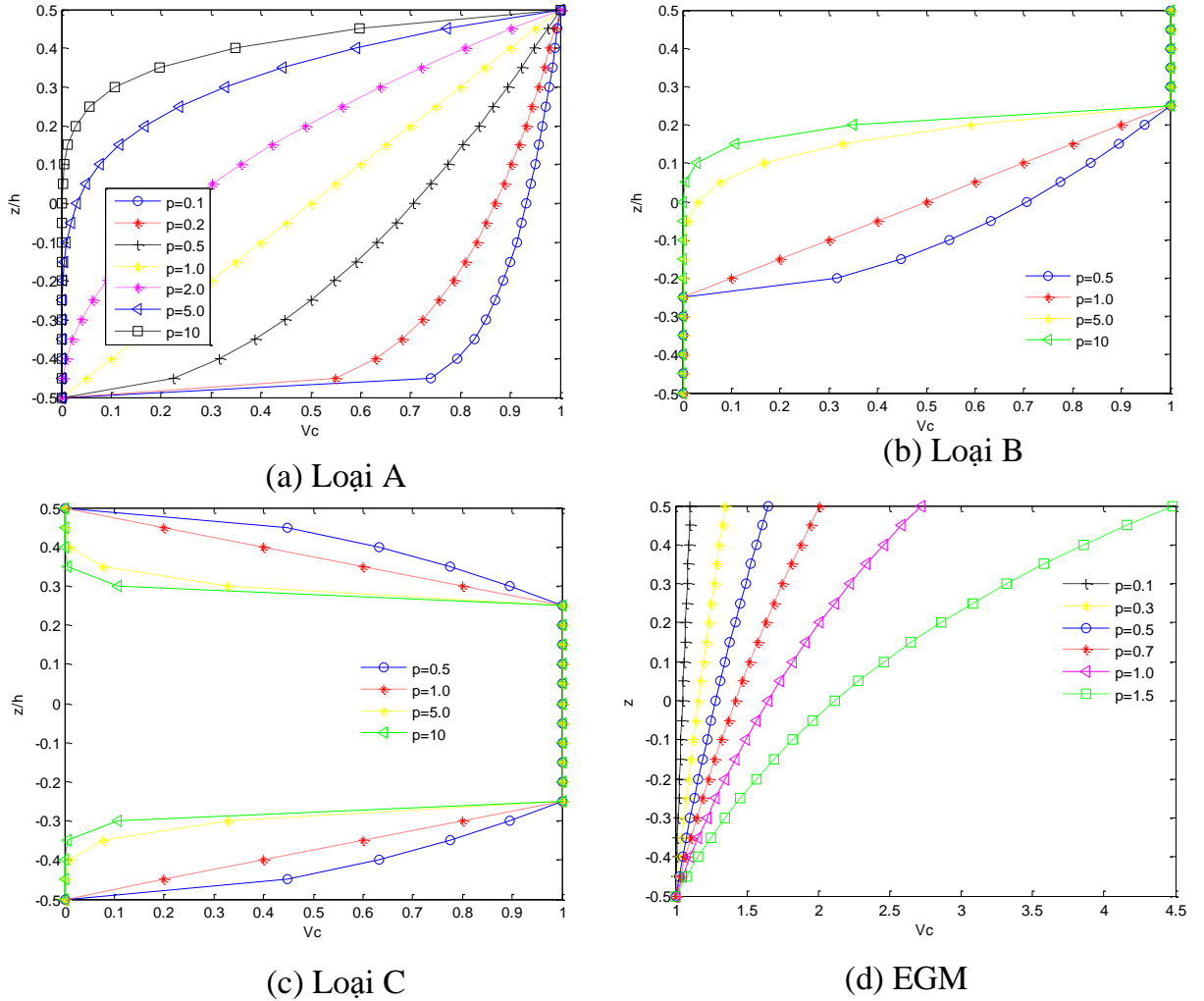
$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (3.3)$$

- Tấm loại C: là tấm composite với lớp trên, lớp dưới được chế tạo từ gốm và kim loại, và lõi giữa được làm từ gốm (lõi cứng) hay kim loại (lõi mềm) (**Hình 3.1d**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (3.4)$$

Đặc trưng hữu hiệu của tấm cũng được xác định theo quy luật hàm mũ [129] (EGM):

$$P^{(j)}(z) = P_c \left(\frac{P_m}{P_c} \right)^{V_c^{(j)}} \quad (3.5)$$



Hình 3.2: Giá trị V_c theo chiều dày tấm

3.2.2 Trường chuyển vị và biến dạng theo HSDT

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ($\varepsilon_{zz} \neq 0$):

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) + g(z) \theta_z(x, y) \end{aligned} \quad (3.6)$$

trong đó $f(z)$ là hàm biến dạng cắt bậc cao, $g(z) = df/dz$. Một số hàm biến dạng cắt bậc cao đã phát triển (**Bảng 3.1**):

Bảng 3.1 Các hàm biến dạng cắt bậc cao

Tác giả	Hàm bậc cao
Reddy (TPT) [139]	$f(z) = z(1 - 4z^2 / 3h^2)$
Mohammed Sobhy (RPT) [140]	$f(z) = z / (1 + 4z^2 / h^2)$
Touratier (SPT) [64]	$f(z) = h \sin(\pi z / h) / \pi$
Soldatos (HPT1) [61]	$f(z) = h \sinh(z / h) - z \cosh(1 / 2)$
Karama et al (EPT) [66]	$f(z) = ze^{-2z^2 / h^2}$
Mahi et al (HPT2) [141]	$f(z) = (h / 2) \tanh(2z / h) - 4z^3 / 3h^2 \cosh^2(1)$

Nguyên tắc thiết lập hàm biến dạng cắt theo HSDT:

- Hàm liên tục
- Mặt biến dạng là mặt cong.
- Thỏa mãn điều kiện tự do ứng suất cắt tại biên trên và dưới của tấm.
- Gồm hai thành phần: 1 thành phần là hàm bậc 3 tương ứng với vật liệu đồng nhất và 1 thành phần phù hợp cho vật liệu FGM.

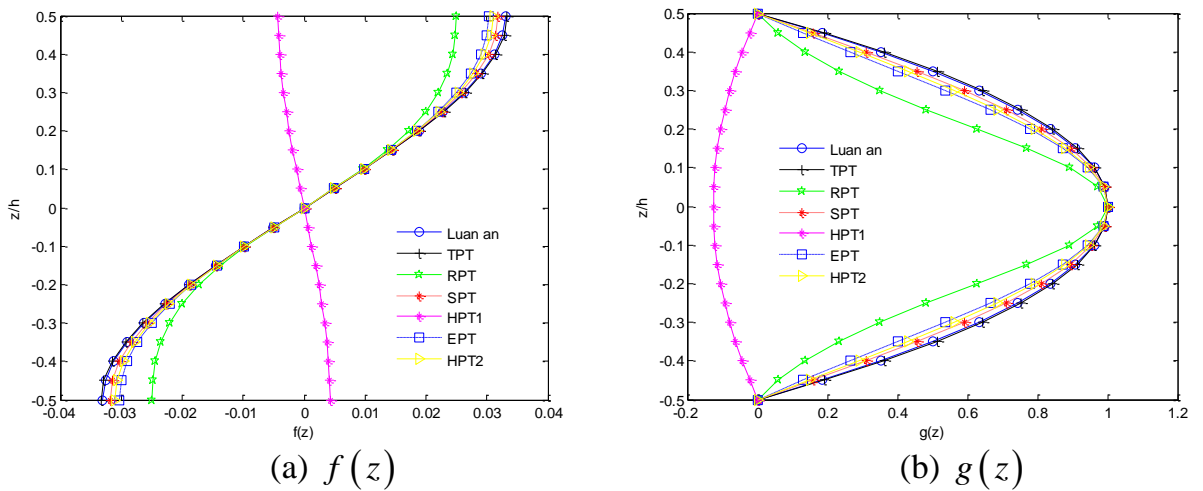
Vì vậy, hàm dạng $f(z)$ được chọn dưới dạng sau:

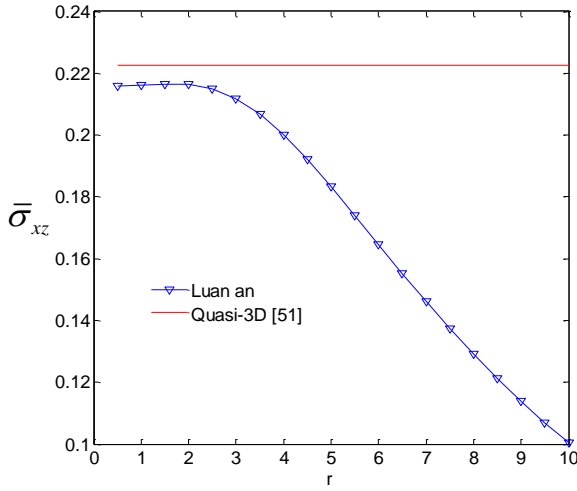
$$f(z) = f_1(z) + \alpha z^3 \quad (3.7)$$

trong đó α là hằng số. Hàm biến dạng cắt bậc cao đề xuất của luận án (NPT) có dạng như sau:

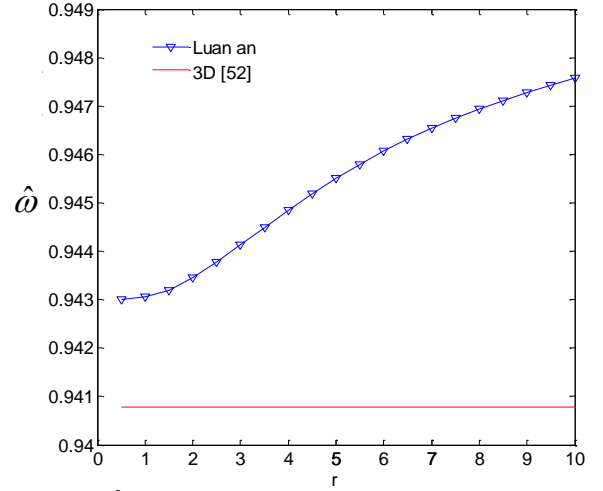
$$f(z) = h \arctan\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)} \quad (3.8)$$

trong đó r là tham số hiệu chỉnh (Luận án chọn $r = 1$ để phân tích ứng xử cho kết cấu tấm FGM – Hình 3.3); $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ là các thành phần chuyển vị và góc xoay tại vị trí mặt trung hoà của tấm.





(c) $\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$ tấm vuông (1-8-1) FG sandwich (loại B, Al/Al₂O₃, $p = 0$)



(d) \hat{w} tấm vuông (2-1-2) FG sandwich (loại C, Al/Al₂O₃, $p = 10$)

Hình 3.3: Hàm biến dạng cắt bậc cao và tối ưu hệ số hiệu chỉnh cắt r

Các thành phần biến dạng được xác định:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \varepsilon_{zz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (3.9b)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.9c)$$

3.3 Phương trình ứng xử của tấm

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong tấm:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_y \Delta T \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_z \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (3.10a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.10b)$$

trong đó:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu(z))E(z)}{(1-2\nu(z))(1+\nu(z))} \quad (3.11a)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu(z)E(z)}{(1-2\nu(z))(1+\nu(z))}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (3.11b)$$

với $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_{xy}$ là các hệ số giãn nở nhiệt; ΔT là quá trình biến đổi nhiệt, được xác định:

$$\Delta T = T(x, y, z) - T_0 \quad (3.12)$$

trong đó T_0 là nhiệt ban đầu, $T(x, y, z)$ là nhiệt phân bố trong tấm [142].

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\psi(z)}{h} T_3(x, y) \quad (3.13)$$

với T_1, T_2, T_3 là các giá trị nhiệt độ khảo sát; $\psi(z)$ là hàm phân bố nhiệt độ cho trường hợp thay đổi phi tuyến.

Thay (3.9a), (3.9b) vào (3.10a) và lấy tích phân hai vế, thu được mối quan hệ giữa các thành phần lực và các thành phần biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{B}^s & \mathbf{X} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{D}^s & \mathbf{Y} \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s & \mathbf{H}^s & \mathbf{Y}^s \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{Y}^T & \mathbf{Y}^{sT} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^H \\ \mathbf{M}^H \\ \mathbf{P}^H \\ \mathbf{R}^H \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

trong đó $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s, \mathbf{H}^s, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}$ lần lượt là các ma trận độ cứng của tấm FGM.

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s, \mathbf{H}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) \mathbf{C}(z) dz \quad (3.15a)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}) = \int_{-h/2}^{h/2} (g', zg', g'f, g'^2) \mathbf{C}(z) dz \quad (3.15b)$$

Các thành phần $\mathbf{N}^H, \mathbf{M}^H, \mathbf{P}^H, \mathbf{R}^H$ được xác định:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^H, M_{xx}^H, P_{xx}^H \\ N_{yy}^H, M_{yy}^H, P_{yy}^H \\ N_{xy}^H, M_{xy}^H, P_{xy}^H \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \times (1, z, f(z)) dz \quad (3.16a)$$

$$R^H = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (3.16b)$$

Tương tự, thay (3.9c) vào (3.10b) thu được mối quan hệ giữa lực cắt và biến dạng cắt:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^s \boldsymbol{\gamma}^0 \quad (3.18)$$

trong đó \mathbf{A}^s là ma trận độ cứng cắt của tấm với các thành phần được xác định:

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g^2 C_{44}(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} g^2 C_{55}(z) dz \quad (3.19)$$

3.4 Phương trình năng lượng

3.4.1 Nguyên lý Hamilton

Nguyên lý biến phân Hamilton của một hệ được xác định:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (3.20)$$

trong đó $\delta U, \delta V$ và δK là các thành phần biến phân năng lượng biến dạng, biến phân thế năng và biến phân động năng của tấm. Thành phần biến phân năng lượng biến dạng:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{A-h/2}^{h/2} \int (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\
&= \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + P_{yy} \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} \right. \\
&\quad + R_{zz} \delta \theta_z + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + P_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) \\
&\quad \left. + Q_x \left(\delta \theta_x + \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial x} \right) + Q_y \left(\delta \theta_y + \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} \right) \right] dA
\end{aligned} \tag{3.21}$$

với $dA = dx dy$ và $\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ là các thành phần nội lực xác định theo (3.14) và (3.18).

Thành phần biến phân thế năng:

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta (w + g \theta_z) dA - \int_A q \delta (w + g \theta_z) dA \tag{3.22}$$

trong đó q là tải trọng phân bố trên tấm, \bar{N} là thành phần lực nằm trong mặt phẳng của tấm:

$$\bar{N} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3.23}$$

Thành phần biến phân động năng:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) \rho(z) dA dz = \int_A \left[I_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \right. \\
&\quad - I_1 \left(\dot{u} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u} + \dot{v} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v} \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) \\
&\quad + J_1 (\dot{u} \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_x \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y \delta \dot{v}) - J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_x \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_y \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) \\
&\quad \left. + K_2 (\dot{\theta}_x \delta \dot{\theta}_x + \dot{\theta}_y \delta \dot{\theta}_y) + L_1 (\dot{w} \delta \dot{\theta}_z + \dot{\theta}_z \delta \dot{w}) + L_2 \dot{\theta}_z \delta \dot{\theta}_z \right] dA
\end{aligned} \tag{3.24}$$

trong đó dấu $(\dot{\cdot})$ là đạo hàm các thành phần chuyển vị theo thời gian (t), $\rho(z)$ là khối lượng riêng và $I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2, L_1, L_2$ là các thành phần quán tính của tấm:

$$\begin{aligned}
(I_0, I_1, I_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \\
(J_1, J_2, K_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (f, fz, f^2) \rho(z) dz \\
(L_1, L_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} (g, g^2) \rho(z) dz
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Thay (3.21), (3.22), (3.24) vào (3.20) và thực hiện các phép biến đổi toán học, phương trình chuyển động của hệ được biểu diễn dưới dạng các phương trình Euler–Lagrange (bằng cách cho các giá trị tương ứng với các biến phân δu , δv , δw , $\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$ và $\delta\theta_z$ bằng 0) có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
\delta u : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + J_1 \ddot{\theta}_x \\
\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + J_1 \ddot{\theta}_y \\
\delta w : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \bar{N}(w) + q &= I_0 \ddot{w} \\
&+ I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w} + J_2 \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) + L_1 \ddot{\theta}_z \\
\delta \theta_x : \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Q_x &= J_1 \ddot{u} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + K_2 \ddot{\theta}_x \\
\delta \theta_y : \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - Q_y &= J_1 \ddot{v} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + K_2 \ddot{\theta}_y \\
\delta \theta_z : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - R_{zz} + g [\bar{N}(w) + q] &= L_1 \ddot{w} + L_2 \ddot{\theta}_z
\end{aligned} \tag{3.26}$$

trong đó $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ là toán tử Laplacian.

Thay (3.14), (3.18) vào (3.26) thu được hệ phương trình để giải theo nguyên lý biến phân Hamilton:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \tag{3.27a}$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + X_{13} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - f_1 = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + J_1 \ddot{\theta}_x$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \tag{3.27b}$$

$$B_{22}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + X_{23} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - f_2 = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + J_1 \ddot{\theta}_y$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\
& D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + D_{22} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + \\
& (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + Y_{13} \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + Y_{23} \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial y^2} + q \\
& + \bar{N}(w) - f_3 = I_0 \ddot{w} + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w} + J_2 \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) + L_1 \ddot{\theta}_z
\end{aligned} \tag{3.27c}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{66}^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - D_{11}^s \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\
& + H_{11}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (H_{12}^s + H_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + H_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + Y_{13} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - A_{55}^s \left(\theta_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) \\
& - f_4 = J_1 \ddot{u} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + K_2 \ddot{\theta}_x
\end{aligned} \tag{3.27d}$$

$$\begin{aligned}
& B_{22}^s \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{66}^s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - D_{22}^s \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
& + H_{22}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + (H_{12}^s + H_{66}^s) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + H_{66}^s \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + Y_{23} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - A_{44}^s \left(\theta_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \\
& - f_5 = J_1 \ddot{v} - J_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} + K_2 \ddot{\theta}_y
\end{aligned} \tag{3.27e}$$

$$\begin{aligned}
& -X_{13} \frac{\partial u}{\partial x} - X_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + Y_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (A_{55}^s - Y_{13}^s) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + (A_{44}^s - Y_{23}^s) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\
& + A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial y^2} - Z_{33} \theta_z + g \left(q + \bar{N}(w) \right) - f_6 = L_1 \ddot{w} + L_2 \ddot{\theta}_z
\end{aligned} \tag{3.27f}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\partial N_{xx}^H}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^H}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial N_{xy}^H}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^H}{\partial y} \\
f_3 &= -\frac{\partial^2 M_{xx}^H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}^H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{yy}^H}{\partial y^2} \\
f_4 &= \frac{\partial P_{xx}^H}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^H}{\partial y}, \quad f_5 = \frac{\partial P_{xy}^H}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}^H}{\partial y}, \quad f_6 = R_{zz}^H
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.4.2 Nguyên lý Lagrange

Để rút ra phương trình chuyển động, phiếm hàm Lagrange được sử dụng:

$$\Pi = U + V - K \tag{3.29}$$

trong đó U , V và K là các thành phần năng lượng biến dạng, thế năng và động năng của tấm.

Thành phần năng lượng biến dạng:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[A_{11} (u_{,x})^2 - 2B_{11} u_{,x} w_{,xx} + 2B_{11}^s u_{,x} \theta_{x,x} + D_{11} (w_{,xx})^2 - 2D_{11}^s w_{,xx} \theta_{x,x} \right. \\
&\quad + H_{11}^s (\theta_{x,x})^2 + 2A_{12} u_{,x} v_{,y} - 2B_{12} u_{,x} w_{,yy} + 2B_{12}^s u_{,x} \theta_{y,y} - 2B_{12} w_{,xx} v_{,y} + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} \\
&\quad - 2D_{12}^s w_{,xx} \theta_{y,y} + 2B_{12}^s \theta_{x,x} v_{,y} - 2D_{12}^s \theta_{x,x} w_{,yy} + 2H_{12}^s \theta_{x,x} \theta_{y,y} + A_{22} (v_{,y})^2 \\
&\quad - 2B_{22} v_{,y} w_{,yy} + 2B_{22}^s v_{,y} \theta_{y,y} + D_{22} (w_{,yy})^2 - 2D_{22}^s w_{,yy} \theta_{y,y} + H_{22}^s (\theta_{y,y})^2 \\
&\quad + X_{13} u_{,x} \theta_z - Y_{13} w_{,xx} \theta_z + Y_{13}^s \theta_{x,x} \theta_z + X_{23} v_{,y} \theta_z - Y_{23} w_{,yy} \theta_z + Y_{23}^s \theta_{y,y} \theta_z + Z_{33} \theta_z \theta_z \\
&\quad + A_{66} (u_{,y})^2 + A_{66} (v_{,x})^2 + 4D_{66} (w_{,xy})^2 + H_{66}^s (\theta_{x,y})^2 + H_{66}^s (\theta_{y,x})^2 + 2A_{66} u_{,y} v_{,x} \\
&\quad - 4B_{66} u_{,y} w_{,xy} + 2B_{66}^s u_{,y} \theta_{x,y} + 2B_{66}^s u_{,y} \theta_{y,x} - 4B_{66} v_{,x} w_{,xy} + 2B_{66}^s v_{,x} \theta_{x,y} + 2B_{66}^s v_{,x} \theta_{y,x} \\
&\quad \left. - 4D_{66}^s w_{,xy} \theta_{x,y} - 4D_{66}^s w_{,xy} \theta_{y,x} + 2H_{66}^s \theta_{x,y} \theta_{y,x} + A_{55}^s (\theta_x)^2 + A_{44}^s (\theta_y)^2 \right] dx dy \quad (3.30)
\end{aligned}$$

với \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{B}^s , \mathbf{D}^s , \mathbf{H}^s , \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Y}^s , \mathbf{Z} và \mathbf{A}^s lần lượt là các ma trận độ cứng của tấm được xác định theo (3.15) và (3.19).

Thành phần thế năng:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [(\bar{N} + q)(w + g\theta_z)] dx dy \quad (3.31)$$

Thành phần động năng:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_V [(\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2] \rho(z) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u} \dot{w}_{,x} + 2J_1 \dot{u} \dot{\theta}_x + I_2 (\dot{w}_{,x})^2 - 2J_2 \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_x + K_2 \dot{\theta}_x^2 \right. \\
&\quad + I_0 \dot{v}^2 - 2I_1 \dot{v} \dot{w}_{,y} + 2J_1 \dot{v} \dot{\theta}_y + I_2 (\dot{w}_{,y})^2 - 2J_2 \dot{w}_{,y} \dot{\theta}_y + K_2 \dot{\theta}_y^2 \\
&\quad \left. + I_0 \dot{w}^2 + 2L_1 \dot{w} \dot{\theta}_z + L_2 \dot{\theta}_z^2 \right] dx dy \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Các thành phần trong công thức (3.32) xác định theo (3.25). Thay (3.30), (3.31) và (3.32) vào (3.29), phiếm hàm Lagrange được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[A_{11} (u_{,x})^2 - 2B_{11} u_{,x} w_{,xx} + 2B_{11}^s u_{,x} \theta_{,x,x} + D_{11} (w_{,xx})^2 - 2D_{11}^s w_{,xx} \theta_{,x,x} \right. \\
& + H_{11}^s (\theta_{,x,x})^2 + 2A_{12} u_{,x} v_{,y} - 2B_{12} u_{,x} w_{,yy} + 2B_{12}^s u_{,x} \theta_{,y,y} - 2B_{12} w_{,xx} v_{,y} + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} \\
& - 2D_{12}^s w_{,xx} \theta_{,y,y} + 2B_{12}^s \theta_{,x,x} v_{,y} - 2D_{12}^s \theta_{,x,x} w_{,yy} + 2H_{12}^s \theta_{,x,x} \theta_{,y,y} + A_{22} (v_{,y})^2 \\
& - 2B_{22} v_{,y} w_{,yy} + 2B_{22}^s v_{,y} \theta_{,y,y} + D_{22} (w_{,yy})^2 - 2D_{22}^s w_{,yy} \theta_{,y,y} + H_{22}^s (\theta_{,y,y})^2 \\
& + X_{13} u_{,x} \theta_z - Y_{13} w_{,xx} \theta_z + Y_{13}^s \theta_{,x,x} \theta_z + X_{23} v_{,y} \theta_z - Y_{23} w_{,yy} \theta_z + Y_{23}^s \theta_{,y,y} \theta_z + Z_{33} \theta_z \theta_z \\
& + A_{66} (u_{,y})^2 + A_{66} (v_{,x})^2 + 4D_{66} (w_{,xy})^2 + H_{66}^s (\theta_{,x,y})^2 + H_{66}^s (\theta_{,y,x})^2 + 2A_{66} u_{,y} v_{,x} \\
& - 4B_{66} u_{,y} w_{,xy} + 2B_{66}^s u_{,y} \theta_{,x,y} + 2B_{66}^s u_{,y} \theta_{,y,x} - 4B_{66} v_{,x} w_{,xy} + 2B_{66}^s v_{,x} \theta_{,x,y} + 2B_{66}^s v_{,x} \theta_{,y,x} \\
& \left. - 4D_{66}^s w_{,xy} \theta_{,x,y} - 4D_{66}^s w_{,xy} \theta_{,y,x} + 2H_{66}^s \theta_{,x,y} \theta_{,y,x} + A_{55}^s (\theta_x)^2 + A_{44}^s (\theta_y)^2 \right] dx dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[(\bar{N} + q)(w + g\theta_z) \right] dx dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[I_0 \dot{u}^2 - 2I_1 \dot{u} \dot{w}_{,x} + 2J_1 \dot{u} \dot{\theta}_x + I_2 (\dot{w}_{,x})^2 \right. \\
& - 2J_2 \dot{w}_{,x} \dot{\theta}_x + K_2 \dot{\theta}_x^2 + I_0 \dot{v}^2 - 2I_1 \dot{v} \dot{w}_{,y} + 2J_1 \dot{v} \dot{\theta}_y + I_2 (\dot{w}_{,y})^2 - 2J_2 \dot{w}_{,y} \dot{\theta}_y + K_2 \dot{\theta}_y^2 \\
& \left. + I_0 \dot{w}^2 + 2L_1 \dot{w} \dot{\theta}_z + L_2 \dot{\theta}_z^2 \right] dx dy
\end{aligned} \tag{3.33}$$

3.5 Lời giải Navier

Xét tấm hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều dày là h , bốn biên tựa đơn. Tấm chịu tải trọng ngang $q(x, y)$ và tải trọng dọc trục phân bố đều $N_{xx}^0 = R_1 N_0, N_{yy}^0 = R_2 N_0, N_{xy}^0 = 0$. Phương trình (3.27) theo nguyên lý biến phân Hamilton được giải bằng cách xấp xỉ trường chuyển vị dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa điều kiện biên như sau:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \\
w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
\theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
\theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \\
\theta_z(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

trong đó $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$, m và n là số sóng dao động theo phương x và phương y , ω là tần số dao động tự do của tấm, $i^2 = -1$. $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ và

Z_{mn} là các biên độ của sóng. Tải trọng tác dụng trên tấm cũng được xấp xỉ dưới dạng chuỗi lượng giác:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (3.35)$$

với $q_{mn} = q_0$ (tải phân bố có dạng hình sin).

Tương tự, xấp xỉ trường nhiệt độ:

$$T_{\eta}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{\eta mn} \sin \lambda x \sin \mu y; \quad \eta = 1, 2, 3 \quad (3.36)$$

Thay thế các thành phần từ (3.34), (3.35) và (3.36) vào (3.27) thu được phương trình dưới dạng ma trận:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.37)$$

Để phân tích bài toán tĩnh: giải $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ để tìm biên độ của sóng, bài toán ổn định: giải $|\mathbf{K}_{ij}| = 0$ để tìm N_0 , dao động tự do: tìm trị riêng của ma trận $\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}$. Các thành phần trong phương trình (3.37):

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2, k_{12} = (A_{12} + A_{66}) \lambda \mu \\ k_{13} &= -B_{11} \lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \lambda \mu^2, k_{14} = B_{11} \lambda^2 + B_{66} \mu^2 \\ k_{15} &= (B_{12}^s + B_{66}^s) \lambda \mu, k_{16} = -\lambda X_{13}, k_{22} = A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2 \\ k_{23} &= -B_{22} \mu^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 \mu, k_{24} = (B_{12}^s + B_{66}^s) \lambda \mu \\ k_{25} &= B_{22}^s \mu^2 + B_{66}^s \lambda^2, k_{26} = -\mu X_{23} \\ k_{33} &= D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4 \\ k_{34} &= -D_{11}^s \lambda^3 - (D_{12} + 2D_{66}^s) \lambda \mu^2, k_{35} = -D_{22}^s \mu^3 - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu \\ k_{36} &= Y_{13} \lambda^2 + Y_{23} \mu^2, k_{44} = H_{11}^s \lambda^2 + H_{66}^s \mu^2 + A_{55}^s, k_{45} = (H_{12}^s + H_{66}^s) \lambda \mu \\ k_{46} &= \lambda (A_{55}^s - Y_{13}^s), k_{55} = H_{66}^s \lambda^2 + H_{22}^s \mu^2 + A_{44}^s, k_{56} = \mu (A_{44}^s - Y_{23}^s) \\ k_{66} &= \lambda^2 A_{55}^s + \mu^2 A_{44}^s + Z_{33}, \alpha = N_0 (R_1 \lambda^2 + R_2 \mu^2), m_{11} = m_{22} = I_0 \\ m_{13} &= -\lambda I_1, m_{14} = J_1, m_{23} = -\mu I_1, m_{25} = J_1, m_{33} = I_0 + (\lambda^2 + \mu^2) I_2 \\ m_{34} &= -\lambda J_2, m_{35} = -\mu J_2, m_{36} = L_1, m_{44} = m_{55} = K_2, m_{66} = L_2 \\ m_{12} &= m_{15} = m_{16} = m_{24} = m_{26} = m_{45} = m_{46} = m_{56} = 0 \\ F_{mn}^1 &= -\lambda (A_1^T \bar{T}_1 + B_1^T \bar{T}_2 + {}^a B_1^T \bar{T}_3), F_{mn}^2 = -\lambda (A_2^T \bar{T}_1 + B_2^T \bar{T}_2 + {}^a B_2^T \bar{T}_3) \\ F_{mn}^3 &= q_{mn} + h \left[(B_1^T \lambda^2 + B_2^T \mu^2) \bar{T}_1 + (D_1^T \lambda^2 + D_2^T \mu^2) \bar{T}_2 + ({}^a D_1^T \lambda^2 + {}^a D_2^T \mu^2) \bar{T}_3 \right] \\ F_{mn}^4 &= -h \lambda ({}^a B_1^T \bar{T}_1 + {}^a D_1^T \bar{T}_2 + {}^a F_1^T \bar{T}_3), F_{mn}^5 = -h \mu ({}^a B_2^T \bar{T}_1 + {}^a D_2^T \bar{T}_2 + {}^a F_2^T \bar{T}_3) \\ F_{mn}^6 &= g q_{mn} + h (L^T \bar{T}_1 + {}^a L^T \bar{T}_2 + {}^b L^T \bar{T}_3) \end{aligned} \quad (3.38)$$

với:

$$\begin{aligned} \{A_i^T, B_i^T, D_i^T\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (C_{1i}\alpha_x + C_{i2}\alpha_y) \left\{1, \frac{z}{h}, \frac{z^2}{h^2}\right\} dz; \quad i = 1, 2 \\ \{^a B_i^T, ^a D_i^T, ^a F_i^T\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (C_{1i}\alpha_x + C_{i2}\alpha_y) \frac{f(z)}{h} \left\{1, \frac{z}{h}, \frac{f(z)}{h}\right\} dz; \quad i = 1, 2 \quad (3.39) \\ \{L^T, ^a L^T, ^b L^T\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (C_{13}\alpha_x + C_{23}\alpha_y) \frac{g'(z)}{h} \left\{1, \frac{z}{h}, \frac{f(z)}{h}\right\} dz \end{aligned}$$

3.5.1 Lực tới hạn khi dòng nhiệt thay đổi đều

Tương tự như phân tích bài toán tấm chịu tải trọng cơ, ổn định của tấm khi nhiệt độ thay đổi một đại lượng ΔT theo chiều dày tấm được xác định bằng cách: $|\mathbf{K}_{ij}| = 0$. Nhiệt độ thay đổi đều theo chiều dày tấm:

$$T(z) = T_b + \Delta T \quad (3.40)$$

3.5.2 Lực tới hạn khi dòng nhiệt thay đổi không đều (tuyến tính và phi tuyến)

Nhiệt độ thay đổi không đều theo chiều dày tấm với quy luật hàm hệ số mũ k :

$$T(z) = T_b + \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \quad (3.41)$$

Ngoài hai quy luật phân bố đều và phân bố phi tuyến của nhiệt độ theo chiều dày tấm như (3.40) và (3.41), quy luật phân bố tuyến tính hay quy luật phân bố phi tuyến theo phương trình Fourier có thể được sử dụng.

3.6 Lò giải Ritz

Xét tấm hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b , chiều dày tấm là h , với các điều kiện biên khác nhau. Phương trình (3.33) theo nguyên lý Lagrange được phân tích theo lò giải Ritz được xấp xỉ trường chuyển vị dưới dạng:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} X'(x) Y(y) e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} X(x) Y'(y) e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} X(x) Y(y) e^{i\omega t} \\ \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} X'(x) Y(y) e^{i\omega t} \\ \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} X(x) Y'(y) e^{i\omega t} \\ \theta_z(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} X(x) Y(y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.42)$$

trong đó ω là tần số dao động tự do của tấm, $i^2 = -1$. $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$ và Z_{mn} là các giá trị cần xác định. Hàm dạng $X(x), Y(y)$ được chọn ứng với các điều kiện biên (ĐKB) của tấm theo tác giả Sobhy [90]:

- Trường hợp: bốn biên tựa đơn (SSSS):

$$X(x) = \sin \alpha_m x, Y(y) = \sin \beta_n y \quad (3.43)$$

với $\alpha_m = m\pi / a$ và $\beta_n = n\pi / b$

- Trường hợp: bốn biên ngàm (CCCC):

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin \alpha_m x - \sinh \alpha_m x - \varphi_m (\cos \alpha_m x - \cosh \alpha_m x) \\ Y(y) &= \sin \beta_n y - \sinh \beta_n y - \delta_n (\cos \beta_n y - \cosh \beta_n y) \end{aligned} \quad (3.44)$$

với:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \frac{\sin \alpha_m a - \sinh \alpha_m a}{\cos \alpha_m a - \cosh \alpha_m a}, \alpha_m = \frac{(m + 0.5)\pi}{a} \\ \delta_n &= \frac{\sin \beta_n b - \sinh \beta_n b}{\cos \beta_n b - \cosh \beta_n b}, \beta_n = \frac{(n + 0.5)\pi}{b} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Bảng 3.2: Hàm dạng hyperbolic áp đặt điều kiện biên $X(x), Y(y)$

ĐKB	$X(x)$	$Y(y)$
SSSS	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
SSCC	$\sin(\lambda x)$	$\sin \beta_n y - \sinh \beta_n y - \delta_n (\cos \beta_n y - \cosh \beta_n y)$
CCSS	$\sin \alpha_m x - \sinh \alpha_m x - \varphi_m (\cos \alpha_m x - \cosh \alpha_m x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	$\sin \alpha_m x - \sinh \alpha_m x - \varphi_m (\cos \alpha_m x - \cosh \alpha_m x)$	$\sin \beta_n y - \sinh \beta_n y - \delta_n (\cos \beta_n y - \cosh \beta_n y)$

Ngoài ra, để thỏa mãn điều kiện biên các hàm dạng của trường chuyển vị cũng được chọn như sau [91]:

Bảng 3.3: Hàm dạng lượng giác áp đặt điều kiện biên $X_1(x), Y_1(y)$

ĐKB	$X_1(x)$	$Y_1(y)$
SSSS	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSSS	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)$
CSCS	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)[\cos(\mu y) - 1]$
CCSS	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
FFCC	$\cos^2(\lambda x)[\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$

Thay thế trường chuyển vị với các hàm dạng $X(x), Y(y) [X_1(x), Y_1(y)]$ đã chọn vào các phương trình cân bằng, ta thu được phương trình ma trận dạng rút gọn: $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{q}$, trong đó:

$$\begin{aligned}
K_{mn}^{11} &= \int_0^b \int_0^a (A_{11}\psi_{1,x}\psi_{1,x} + A_{66}\psi_{1,y}\psi_{1,y}) dx dy \\
K_{mn}^{12} &= \int_0^b \int_0^a (A_{12}\psi_{1,x}\psi_{2,y} + A_{66}\psi_{1,y}\psi_{2,x}) dx dy \\
K_{mn}^{13} &= - \int_0^b \int_0^a (B_{11}\psi_{1,x}\varphi_{,xx} + B_{12}\psi_{1,x}\varphi_{,yy} + 2B_{66}\psi_{1,y}\varphi_{,xy}) dx dy \\
K_{mn}^{14} &= \int_0^b \int_0^a (B_{11}^s\psi_{1,x}\psi_{1,x} + B_{66}^s\psi_{1,y}\psi_{1,y}) dx dy \\
K_{mn}^{15} &= \int_0^b \int_0^a (B_{12}^s\psi_{1,x}\psi_{2,y} + B_{66}^s\psi_{1,y}\psi_{2,x}) dx dy, \quad K_{mn}^{16} = \int_0^b \int_0^a X_{13}\psi_{1,x}\varphi dx dy \\
K_{mn}^{22} &= \int_0^b \int_0^a (A_{22}\psi_{2,y}\psi_{2,y} + A_{66}\psi_{2,x}\psi_{2,x}) dx dy \\
K_{mn}^{23} &= - \int_0^b \int_0^a (B_{12}\psi_{2,y}\varphi_{,xx} + B_{22}\psi_{2,y}\varphi_{,yy} + 2B_{66}\psi_{2,x}\varphi_{,xy}) dx dy \\
K_{mn}^{24} &= \int_0^b \int_0^a (B_{12}^s\psi_{2,y}\psi_{1,x} + B_{66}^s\psi_{2,x}\psi_{1,y}) dx dy \\
K_{mn}^{25} &= \int_0^b \int_0^a (B_{22}^s\psi_{2,y}\psi_{2,y} + B_{66}^s\psi_{2,x}\psi_{2,x}) dx dy, \quad K_{mn}^{26} = \int_0^b \int_0^a X_{23}\psi_{2,y}\varphi dx dy \\
K_{mn}^{33} &= \int_0^b \int_0^a (D_{11}\varphi_{,xx}\varphi_{,xx} + 2D_{12}\varphi_{,xx}\varphi_{,yy} + D_{22}\varphi_{,yy}\varphi_{,yy} + 4D_{66}\varphi_{,xy}\varphi_{,xy} + \alpha) dx dy \\
K_{mn}^{34} &= - \int_0^b \int_0^a (D_{11}^s\varphi_{,xx}\psi_{1,x} + D_{12}^s\varphi_{,yy}\psi_{1,x} + 2D_{66}^s\varphi_{,xy}\psi_{1,y}) dx dy \\
K_{mn}^{35} &= - \int_0^b \int_0^a (D_{22}^s\varphi_{,yy}\psi_{2,y} + D_{12}^s\varphi_{,xx}\psi_{2,y} + 2D_{66}^s\varphi_{,xy}\psi_{2,x}) dx dy \\
K_{mn}^{36} &= - \int_0^b \int_0^a (Y_{13}\varphi_{,xx}\varphi + Y_{23}\varphi_{,yy}\varphi) dx dy \\
K_{mn}^{44} &= \int_0^b \int_0^a (H_{11}^s\psi_{1,x}\psi_{1,x} + H_{66}^s\psi_{1,y}\psi_{1,y} + A_{55}^s\psi_1\psi_1) dx dy \\
K_{mn}^{45} &= \int_0^b \int_0^a (H_{12}^s\psi_{1,x}\psi_{2,y} + H_{66}^s\psi_{1,y}\psi_{2,x}) dx dy \\
K_{mn}^{46} &= \int_0^b \int_0^a Y_{13}^s\psi_{1,x}\varphi dx dy, \quad K_{mn}^{55} = \int_0^b \int_0^a (H_{22}^s\psi_{2,y}\psi_{2,y} + A_{55}^s\psi_2\psi_2) dx dy \\
K_{mn}^{56} &= \int_0^b \int_0^a Y_{23}^s\psi_{2,y}\varphi dx dy, \quad K_{mn}^{66} = \int_0^b \int_0^a Z_{33}\varphi\varphi dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= N_{xx}^0 \varphi_{,x} \varphi_{,x} + 2N_{xy}^0 \varphi_{,x} \varphi_{,y} + N_{yy}^0 \varphi_{,y} \varphi_{,y} \\
M_{mn}^{11} &= \int_0^b \int_0^a I_0 \psi_1 \psi_1 dx dy, M_{mn}^{13} = -\int_0^b \int_0^a I_1 \psi_1 \varphi_{,x} dx dy, M_{mn}^{14} = \int_0^b \int_0^a J_1 \psi_1 \psi_1 dx dy \\
M_{mn}^{22} &= \int_0^b \int_0^a I_0 \psi_2 \psi_2 dx dy, M_{mn}^{23} = -\int_0^b \int_0^a I_1 \psi_2 \varphi_{,y} dx dy, M_{mn}^{25} = \int_0^b \int_0^a J_1 \psi_2 \psi_2 dx dy \\
M_{mn}^{33} &= \int_0^b \int_0^a (I_0 \varphi \varphi + I_2 \varphi_{,x} \varphi_{,x} + I_2 \varphi_{,y} \varphi_{,y}) dx dy, M_{mn}^{34} = -\int_0^b \int_0^a J_2 \varphi_{,x} \psi_1 dx dy \\
M_{mn}^{35} &= -\int_0^b \int_0^a J_2 \varphi_{,y} \psi_2 dx dy, M_{mn}^{36} = \int_0^b \int_0^a L_1 \varphi \varphi dx dy, M_{mn}^{44} = \int_0^b \int_0^a K_2 \psi_1 \psi_1 dx dy \\
M_{mn}^{55} &= \int_0^b \int_0^a K_2 \psi_2 \psi_2 dx dy, M_{mn}^{66} = \int_0^b \int_0^a L_2 \varphi \varphi dx dy \\
M_{mn}^{12} &= M_{mn}^{15} = M_{mn}^{16} = M_{mn}^{26} = M_{mn}^{46} = M_{mn}^{56} = M_{mn}^{24} = M_{mn}^{45} = 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

3.7 Kết quả số

Trong chương này, một số ví dụ số áp dụng cho tấm FGM thông thường (loại A), tấm sandwich có lõi là FGM, mặt trên và mặt dưới là vật liệu đồng nhất (loại B), tấm sandwich có lõi là vật liệu đồng nhất, mặt trên và mặt dưới là FGM (loại C) có kích thước hình chữ nhật (**Hình 3.1**). Tính chất vật liệu của các thành phần như trong **Bảng 3.4**.

Bảng 3.4: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν	α (10 ⁻⁶ /K)
Aluminum (Al)	70	2707	0.3	23
Aluminum (Al*)	70	2702	0.3	23
Titanium (Ti-6Al-4V)	66.2	4430	0.3	10.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3	7
Zirconia (ZrO ₂)	151	3000	0.3	10
Zirconia (ZrO ₂ *)	117	3000	0.3	7.11

Biến thiên của mô đun đàn hồi, khối lượng riêng, hệ số giãn nở nhiệt theo quy luật lũy thừa và hàm mũ, hệ số Poisson không thay đổi theo chiều dày tấm. Luận án lần lượt khảo sát các bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của tấm FGM và tấm sandwich FGM.

Các đại lượng không thứ nguyên sử dụng cho kết quả lời giải:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(z) &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{u}_3 = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
\hat{u}_3 &= \frac{10hE_0}{a^2 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), E_0 = 1 \text{ GPa}, \bar{w}_1 = \frac{h}{\alpha_0 T_2 a^2} \bar{u}_3\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
\bar{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \hat{\sigma}_{xx}(z) = \frac{10h^2}{a^2 q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(z) &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{u}_3 = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
\hat{u}_3 &= \frac{10h E_0}{a^2 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), E_0 = 1 \text{ GPa}, \bar{w}_1 = \frac{h}{\alpha_0 \bar{T}_2 a^2} \bar{u}_3\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
\bar{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \hat{\sigma}_{xx}(z) = \frac{10h^2}{a^2 q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \\
\bar{\sigma}_{1xx}(z) &= \frac{h^2}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a^2} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \bar{\sigma}_{xy}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_{xy}(0, 0, z) \\
\bar{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{\sigma}_{1xz}(z) = \frac{10h}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \\
\alpha_0 &= 10^{-6} / \text{K}, \bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}, \hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{100 E_0 h^3} \\
\bar{\omega} &= \frac{\omega a b}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_c^2) \rho_c}{E_c}}, \hat{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3 \\
\bar{\omega}_1 &= \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}, \bar{\omega}_2 = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

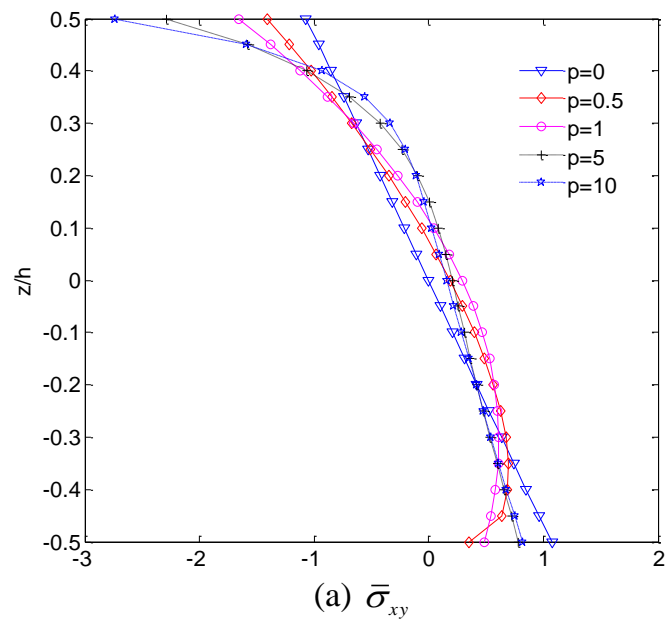
3.7.1 Bài toán tĩnh

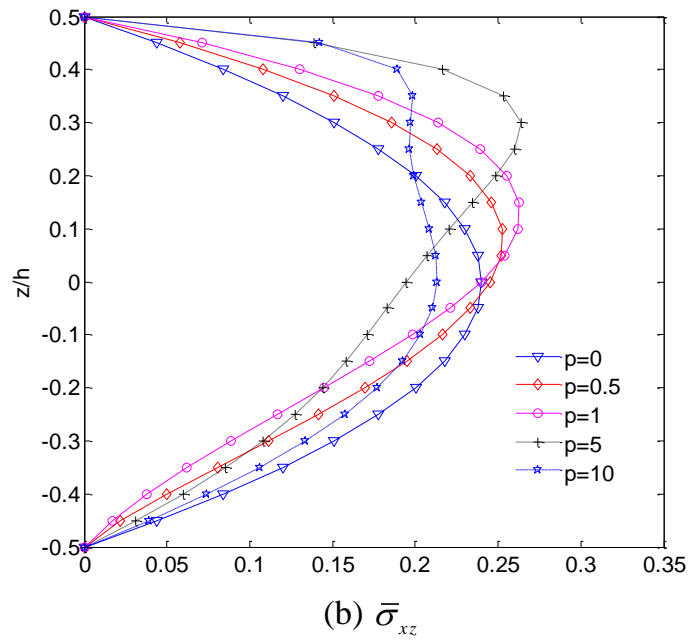
Để kiểm chứng kết quả nghiên cứu phân tích tĩnh, luận án khảo sát giá trị chuyển vị, ứng suất trong và ngoài mặt phẳng của tấm vuông FGM thông thường (loại A) với tỉ số cạnh và chiều dày tấm $a/h = 10$ với các hệ số đặc trưng vật liệu (p) khác nhau dưới tác dụng của tải phân bố dạng hình sin. Kết quả lời giải được sự so sánh với lời giải Quasi-3D và HSDT (**Bảng 3.5**). Nhìn chung, kết quả luận án là khá phù hợp với các nghiên cứu này. **Hình 3.4** biểu diễn các thành phần chuyển vị và ứng suất trong tấm khi không kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm.

Bảng 3.5: Giá trị chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

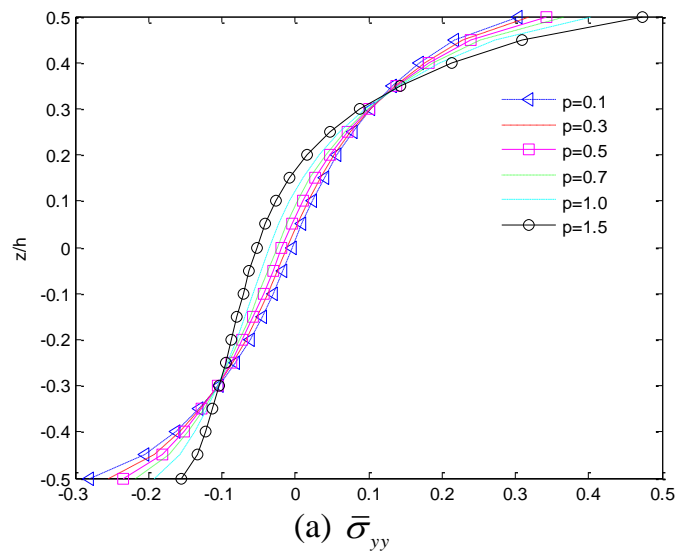
p	Tham khảo	$\bar{u}_1(-h/4)$	\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.6413	0.5890	1.4897	0.6111	0.2611
	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.6416	0.5884	1.4915	0.6103	0.2605
	Quasi-3D [143]	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D [144]	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SPT [145]	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HPT [67]	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TPT [130]	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2608
2	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.8982	0.7573	1.3959	0.5422	0.2742
	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.8986	0.7572	1.3972	0.5431	0.2733
	Quasi-3D [143]	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D [144]	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495

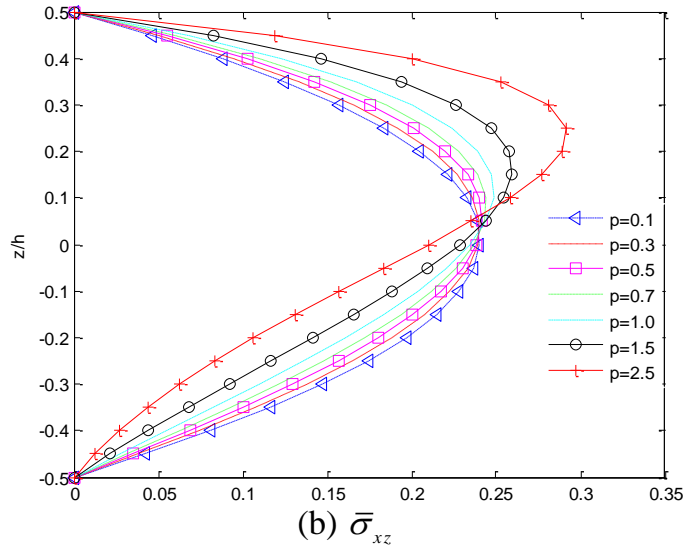
	SPT [145]	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HPT [67]	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TPT [130]	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2737
4	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.0500	0.8816	1.1792	0.5669	0.2546
	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.0507	0.8818	1.1825	0.5680	0.2522
	Quasi-3D [143]	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D [144]	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SPT [145]	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2380
	HPT [67]	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TPT [130]	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
8	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.0759	0.9746	0.9473	0.5857	0.2094
	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.0767	0.9751	0.9487	0.5874	0.2082
	Quasi-3D [143]	1.0830	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D [144]	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	SPT [145]	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HPT [67]	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TPT [130]	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088





Hình 3.4: Giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A, $\varepsilon_{zz} = 0$, $a/h = 10$ và tải phân bố hình sin)





Hình 3.5: Giá trị ứng suất của tấm FGM thông thường (EGM, Al/Al₂O₃, loại A, $\varepsilon_{zz} \neq 0$, $a/h = 10$ và tải phân bố hình sin)

Tương tự, trong **Bảng 3.6**, **3.7** và **3.8** là kết quả của các thành phần chuyển vị đứng (\hat{u}_3), ứng suất tiếp ($\bar{\sigma}_{yy}$) và ứng suất pháp ($\bar{\sigma}_{xz}$) được so sánh với Lời giải chính xác 3D [139], lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dạng đa thức bậc 3 TPT [139], lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dạng hyperbolic HPT [146], và lý thuyết biến dạng cắt tiếp cận 3 chiều Quasi-3D [76]. Kết quả nghiên cứu nhận thấy: khi so sánh với Lời giải 3D và Quasi-3D lần lượt có sai lệch là 0.16% và 1.27% (ứng với $a/b = 2$, $a/h = 2$ và $p = 0.3$), trong khi lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HPT [146] so sánh với hai lời giải trên thì giá trị sai lệch lần lượt 3.12% và 4.18%. **Hình 3.5** biểu diễn các thành phần ứng suất trong tấm khi kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm.

Bảng 3.6: Giá trị chuyển vị ($\hat{u}_3(0)$) của tấm FGM thông thường (EGM, Al/Al₂O₃, loại A) chịu tải trọng phân bố hình sin

a/b	a/h	Tham khảo	$p = 0.1$	$p = 0.3$	$p = 0.5$	$p = 0.7$	$p = 1.0$	$p = 1.5$
1/6	2	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.64945	1.47128	1.32792	1.19746	1.02343	0.78414
		3D [139]	1.63774	1.48846	1.35184	1.22688	1.05929	0.82606
		TPT [139]	1.62939	1.47309	1.33066	1.20101	1.02823	0.79056
		HPT [146]	1.54777	1.39964	1.26493	1.14249	1.97956	0.75560
		Quasi-3D [76]	1.6294	1.4731	1.3307	1.2010	1.0282	0.7906
1/5		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.61926	1.44431	1.30355	1.17547	1.00460	0.76963
		3D [139]	1.60646	1.46007	1.32607	1.20349	1.03907	0.81024
		TPT [139]	1.59825	1.44493	1.30522	1.17804	1.00856	0.77540
		HPT [146]	1.51991	1.37444	1.24214	1.12188	0.96184	0.74184
		Quasi-3D [76]	1.5982	1.4449	1.3052	1.1780	1.0086	0.7754
1/4		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.56613	1.39684	1.26068	1.13677	0.97146	0.74411
		3D [139]	1.55146	1.41013	1.28074	1.16235	1.00352	0.78241
		TPT [139]	1.54348	1.39541	1.26048	1.13764	0.97395	0.74874
		HPT [146]	1.47089	1.33009	1.20201	1.08559	0.93065	0.71762
		Quasi-3D [76]	1.5435	1.3954	1.2605	1.1376	0.9739	0.7487

1/3	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.46115	1.30307	1.17599	1.06033	0.90598	0.69370
	3D [139]	1.44295	1.31160	1.19129	1.08117	0.93337	0.72750
	TPT [139]	1.43542	1.29771	1.17221	1.05795	0.90567	0.69615
	HPT [146]	1.37394	1.24238	1.12269	1.01386	0.86898	0.66977
	Quasi-3D [76]	1.4354	1.2977	1.1722	1.0579	0.9057	0.6961
1/2	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.21999	1.08764	0.98143	0.88473	0.75563	0.57800
	3D [139]	1.19445	1.08593	0.98640	0.89520	0.77266	0.60174
	TPT [139]	1.18798	1.07399	0.97009	0.87548	0.74936	0.57578
	HPT [146]	1.15080	1.04052	0.94012	0.84878	0.72712	0.55975
	Quasi-3D [76]	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.61372	0.54617	0.49255	0.44364	0.37823	0.28808
	3D [139]	0.57693	0.52473	0.47664	0.43240	0.37269	0.28904
	TPT [139]	0.57308	0.51806	0.46788	0.42216	0.36117	0.27712
	HPT [146]	0.58586	0.52955	0.47814	0.43127	0.36871	0.28246
	Quasi-3D [76]	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771

Bảng 3.7: Giá trị ứng suất màng ($\bar{\sigma}_{yy}(h/2)$) của tấm FGM thông thường (EGM, Al/Al₂O₃, loại A) chịu tải trọng phân bố hình sin

a/b	a/h	Tham khảo	$p=0.1$	$p=0.3$	$p=0.5$	$p=0.7$	$p=1.0$	$p=1.5$
1/6	4	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.21725	0.23134	0.24574	0.26134	0.28725	0.33833
		3D [139]	0.21814	0.23211	0.24699	0.26284	0.28857	0.33725
		TPT [139]	0.23686	0.25204	0.26830	0.28574	0.31441	0.36990
		HPT [146]	0.28170	0.30133	0.32219	0.34435	0.38024	0.44786
		Quasi-3D [76]	0.2369	0.2521	0.2683	0.2858	0.3144	0.3699
1/5		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.21980	0.23408	0.24873	0.26457	0.29085	0.34258
		3D [139]	0.22060	0.23476	0.24984	0.26591	0.29199	0.34133
		TPT [139]	0.23912	0.25450	0.27097	0.28863	0.31764	0.37371
		HPT [146]	0.28261	0.30231	0.32323	0.34547	0.38148	0.44934
		Quasi-3D [76]	0.2391	0.2545	0.2710	0.2887	0.3177	0.3737
1/4		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.22407	0.23867	0.25371	0.26996	0.29687	0.34969
		3D [139]	0.22470	0.23918	0.25460	0.27103	0.29770	0.34816
		TPT [139]	0.24286	0.25858	0.27539	0.29342	0.32299	0.38004
		HPT [146]	0.28399	0.30379	0.32483	0.34719	0.38338	0.45159
		Quasi-3D [76]	0.2429	0.2586	0.2754	0.2934	0.3230	0.3801
1/3		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.23156	0.24675	0.26250	0.27948	0.30752	0.36227
		3D [139]	0.23188	0.24692	0.26295	0.28002	0.30775	0.36021
		TPT [139]	0.24931	0.26563	0.28307	0.30174	0.33230	0.39106
		HPT [146]	0.28588	0.30583	0.32702	0.34954	0.38601	0.45471
		Quasi-3D [76]	0.2493	0.2656	0.2831	0.3018	0.3323	0.3911
1/2		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.24352	0.25969	0.27668	0.29493	0.32490	0.38282
		3D [139]	0.24314	0.25913	0.27618	0.29434	0.32385	0.37968
		TPT [139]	0.25878	0.27609	0.29456	0.31428	0.34644	0.40788
		HPT [146]	0.28539	0.30534	0.32655	0.34908	0.38556	0.45428
		Quasi-3D [76]	0.2588	0.2761	0.2946	0.3143	0.3465	0.4079
1		Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.22626	0.24177	0.25839	0.27611	0.30493	0.35971
		3D [139]	0.22472	0.23995	0.25621	0.27356	0.30177	0.35885
		TPT [139]	0.23457	0.25098	0.26842	0.28698	0.31706	0.37386
		HPT [146]	0.24080	0.25783	0.27593	0.29515	0.32627	0.38482
		Quasi-3D [76]	0.2346	0.2510	0.2684	0.2870	0.3171	0.3739

Bảng 3.8: Giá trị ứng suất cắt ($\bar{\sigma}_{xz}(0)$) của tấm FGM thông thường (EGM, Al/Al₂O₃, loại A, $a/h = 10$) chịu tải trọng phân bố hình sin

a/b	Tham khảo	$p = 0.1$	$p = 0.3$	$p = 0.5$	$p = 0.7$	$p = 1.0$	$p = 1.5$
1/3	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.4325	0.4305	0.4291	0.4269	0.4223	0.4112
	Quasi-3D [146]	0.4286	0.4279	0.4264	0.4242	0.4196	0.4084
	HPT [146]	0.4285	0.4278	0.4263	0.4241	0.4195	0.4084
	TPT [146]	0.4418	0.4411	0.4396	0.4375	0.4330	0.4222
1/2	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.3844	0.3827	0.3814	0.3794	0.3753	0.3655
	Quasi-3D [146]	0.3809	0.3803	0.3790	0.3770	0.3730	0.3630
	HPT [146]	0.3809	0.3803	0.3789	0.3770	0.3729	0.3630
	TPT [146]	0.3927	0.3920	0.3908	0.3889	0.3849	0.3752
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.2402	0.2391	0.2383	0.2371	0.2345	0.2284
	Quasi-3D [147]	0.274	-	0.271	-	0.260	-
	Quasi-3D [146]	0.2380	0.2376	0.2368	0.2356	0.2330	0.2268
	HPT [146]	0.2380	0.2376	0.2368	0.2356	0.2330	0.2268
	TPT [146]	0.2454	0.2450	0.2442	0.2430	0.2405	0.2344

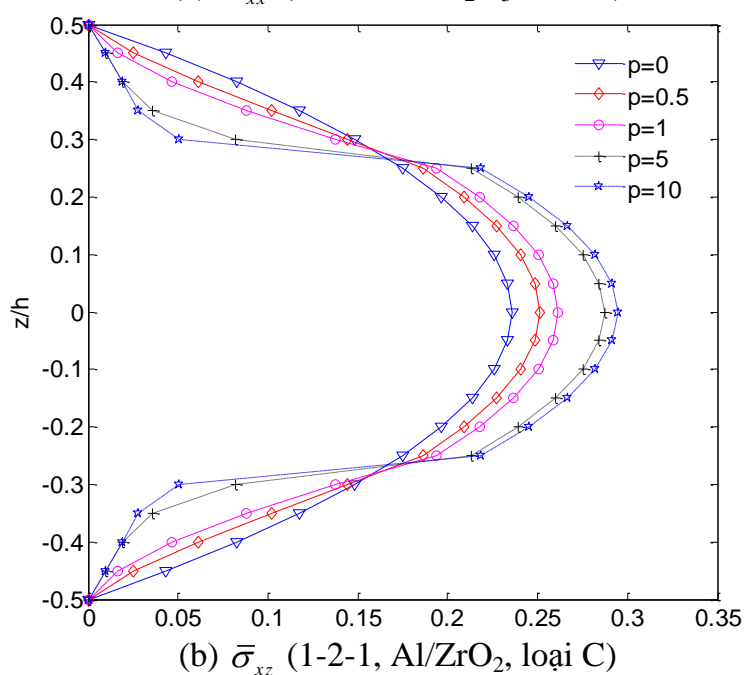
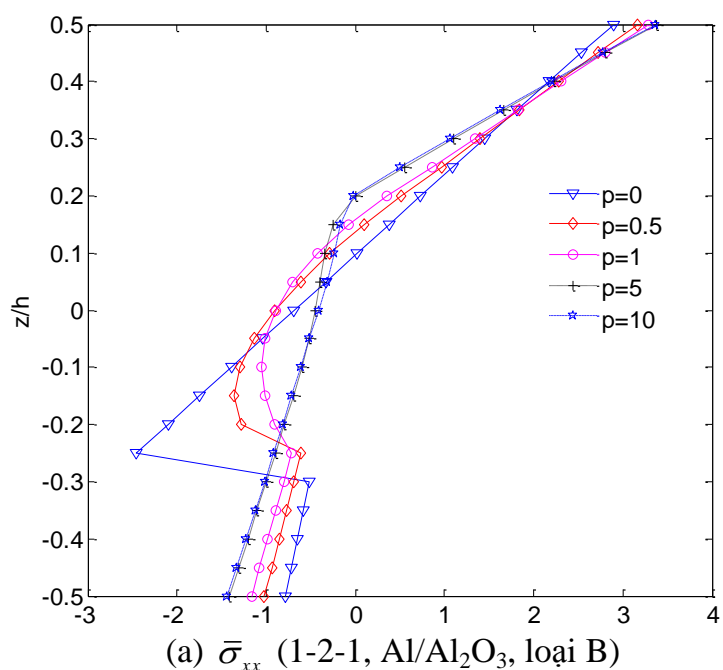
Bên cạnh đó, luận án cũng tiến hành kiểm chứng kết quả tính toán của tấm sandwich FGM (loại B và loại C) chịu tác dụng bởi tải trọng phân bố dạng hình sin và lần lượt thể hiện trong **Bảng 3.9** và **3.10**. **Hình 3.6** biểu diễn các thành phần ứng suất phân bố trong tấm loại B và loại C khi không kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} = 0$).

Bảng 3.9: Giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

p	Tham khảo	$\bar{u}_1(-h/4)$	\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.3247	0.3744	1.4761	1.0130	0.2161
	Quasi-3D [148]	-	0.3711	-	-	0.2227
0.5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.5542	0.5245	1.5750	0.6965	0.2509
	Quasi-3D [148]	-	0.5238	-	-	0.2581
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.7337	0.6345	1.5691	0.5447	0.2733
	FSDT [149]	-	0.6337	-	-	0.2458
	Quasi-3D [73]	-	0.6324	-	-	0.2594
	Quasi-3D [150]	-	0.6305	-	-	0.2788
	Quasi-3D [148]	-	0.6305	-	-	0.2789
4	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.0550	0.8331	1.2539	0.5614	0.2697
	FSDT [149]	-	0.8191	-	-	0.1877
	Quasi-3D [73]	-	0.8307	-	-	0.2398
	Quasi-3D [150]	-	0.8202	-	-	0.2778
	Quasi-3D [148]	-	0.8199	-	-	0.2747
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.0798	0.8807	1.2539	0.5614	0.1982
	FSDT [149]	-	0.8556	-	-	0.1234
	Quasi-3D [73]	-	0.8740	-	-	0.1944
	Quasi-3D [150]	-	0.8650	-	-	0.2059
	Quasi-3D [148]	-	0.8645	-	-	0.2034

Bảng 3.10: Giá trị ứng suất cắt ($\bar{\sigma}_{xz}(0)$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/ZrO₂, loại C) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.23581	0.23581	0.23581	0.23581	0.23581	0.23581
	Zenkour [132] (TPT)	0.23857	0.23857	-	0.23857	0.23857	0.23857
	Zenkour [132] (SPT)	0.24618	0.24618	-	0.24618	0.24618	0.24618
	Zenkour [151] (Quasi-3D)	0.23910	0.23910	-	0.23910	0.23910	0.23910
	Neves et al [148] (Quasi-3D)	-	0.25380	0.22910	0.24610	0.24410	0.23630
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	-	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794	0.23794
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.28953	0.26882	0.26852	0.25906	0.25736	0.25054
	Zenkour [132] (TPT)	0.29203	0.27104	-	0.26117	0.25951	0.25258
	Zenkour [132] (SPT)	0.29907	0.27774	-	0.26809	0.26680	0.26004
	Zenkour [151] (Quasi-3D)	0.36531	0.34366	-	0.32853	0.31785	0.30845
	Neves et al [148] (Quasi-3D)	-	0.27450	0.26400	0.26430	0.25940	0.24960
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	-	0.27050	0.27017	0.26060	0.25890	0.25196
2	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.32336	0.28607	0.28569	0.26982	0.26731	0.25645
	Zenkour [132] (TPT)	0.32622	0.28838	-	0.27188	0.26939	0.25834
	Zenkour [132] (SPT)	0.33285	0.29422	-	0.27807	0.27627	0.26543
	Zenkour [151] (Quasi-3D)	0.41778	0.38601	-	0.36417	0.34824	0.33543
	Neves et al [148] (Quasi-3D)	-	0.27600	0.28770	0.26680	0.26360	0.25230
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	-	0.28792	0.28742	0.27138	0.26885	0.25776
5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.38250	0.31182	0.31087	0.28420	0.28047	0.26327
	Zenkour [132] (TPT)	0.38634	0.31454	-	0.28643	0.28265	0.26512
	Zenkour [132] (SPT)	0.39370	0.31930	-	0.29150	0.28895	0.27153
	Zenkour [151] (Quasi-3D)	0.46890	0.42723	-	0.39918	0.37791	0.36234
	Neves et al [148] (Quasi-3D)	-	0.27120	0.33770	0.26550	0.26690	0.25460
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	-	0.31419	0.31293	0.28606	0.28217	0.26463
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.42744	0.32936	0.32732	0.29326	0.28854	0.26705
	Zenkour [132] (TPT)	0.43206	0.33242	-	0.29566	0.29080	0.26895
	Zenkour [132] (SPT)	0.44147	0.33644	-	0.29529	0.29671	0.27676
	Zenkour [151] (Quasi-3D)	0.49051	0.44435	-	0.41385	0.39045	0.37390
	Neves et al [148] (Quasi-3D)	-	0.26710	0.38060	0.26390	0.26920	0.25680
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	-	0.33210	0.32959	0.29534	0.29036	0.26850



Hình 3.6: Giá trị ứng suất trong tấm (PGM, $a/h = 10$, tựa đơn và tải trọng phân bố hình sin)

Để khảo sát bài toán tấm chịu tải trọng nhiệt độ, luận án tiến hành so sánh giá trị chuyển vị (\bar{w}_1) và ứng suất cắt ($\bar{\sigma}_{1xz}$) với Houari và cộng sự [142] (lời giải Quasi-3D), Zenkour và Alghamdi [142] (lời giải Quasi-3D và HSDT) và TPT (hàm biến dạng cắt dạng đa thức bậc 3 của Zenkour). Kết quả nghiên cứu của luận án tương đối phù hợp với các kết quả trong nghiên cứu này khi xét đến biến dạng theo chiều dày tấm. Các số liệu so sánh lần lượt trình bày trong các **Bảng 3.11** và **3.12**.

Bảng 3.11: Giá trị chuyển vị (\bar{w}_1) của tấm sandwich FGM (PGM, Ti-6Al-4V/ZrO₂, loại C) hình vuông ($a/h = 10, \bar{T}_3 = 0$)

p	Tham khảo	\bar{w}_1				
		1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.467251	0.467251	0.467251	0.467251	0.467251
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634	0.461634
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262
	TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262	0.480262
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.615107	0.592612	0.569721	0.606424	0.579707
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.614565	0.586124	0.563416	0.599933	0.573327
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.614565	0.586124	0.563416	0.599933	0.573327
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.636916	0.606292	0.582342	0.621098	0.592604
	TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.636891	0.606256	0.582302	0.621067	0.592568
2	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.653025	0.624986	0.596033	0.638751	0.607914
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.647135	0.618046	0.590491	0.633340	0.601843
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.647135	0.618046	0.590491	0.633340	0.601843
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.671503	0.639361	0.609875	0.656142	0.621581
	TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.671486	0.639325	0.609829	0.656115	0.621544
3	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.664212	0.637536	0.608777	0.652206	0.620184
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.658153	0.631600	0.602744	0.646475	0.614121
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.658153	0.631600	0.602744	0.646475	0.614121
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.683572	0.653671	0.622467	0.670275	0.634175
	TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.683560	0.653638	0.622420	0.670253	0.634139
4	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.668903	0.644213	0.615027	0.658334	0.626517
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.662811	0.638705	0.609560	0.652890	0.620663
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.662811	0.638705	0.609560	0.652890	0.620663
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.688803	0.661291	0.629533	0.677321	0.640940
	TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.688795	0.661260	0.629487	0.677303	0.640905
5	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.670962	0.647173	0.618931	0.661012	0.629435
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.665096	0.642948	0.613842	0.656490	0.624629
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.665096	0.642948	0.613842	0.656490	0.624629
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.691420	0.665898	0.634003	0.681343	0.645070
	TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.691415	0.665869	0.633958	0.681327	0.645036

Bảng 3.12: Giá trị ứng suất cắt ($\bar{\sigma}_{1xz}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Ti-6Al-4V/ZrO₂, loại C) hình vuông ($a/h = 10, \bar{T}_3 = -100$)

p	Tham khảo	$\bar{\sigma}_{1xz}$				
		1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.754323	0.754323	0.754323	0.754323	0.754323
	Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.762438	0.762438	0.762438	0.762438	0.762438
	Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.762438	0.762438	0.762438	0.762438	0.762438

Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.574063	0.574063	0.574063	0.574063	0.574063
TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.466349	0.466349	0.466349	0.466349	0.466349
1 Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.908763	0.8997817	0.910574	0.8936251	0.906572
Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.916983	0.911165	0.922812	0.905127	0.914313
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.916983	0.911165	0.922812	0.905127	0.914313
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.564059	0.559957	0.566925	0.556662	0.562231
TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.696774	0.694817	0.705269	0.689077	0.697901
2 Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.911828	0.907431	0.922119	0.886271	0.9087515
Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.919218	0.905787	0.930546	0.894489	0.916889
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.919218	0.905787	0.930546	0.894489	0.916889
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.696044	0.689620	0.711266	0.679194	0.699571
TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.565881	0.556769	0.571546	0.550567	0.564062
3 Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.915019	0.888653	0.922901	0.875448	0.906782
Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.923419	0.896673	0.930393	0.883314	0.914156
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.923419	0.896673	0.930393	0.883314	0.914156
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.697635	0.681516	0.710627	0.669256	0.696850
TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.568711	0.551237	0.571319	0.544027	0.562514
4 Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.923447	0.802350	0.206632	0.67995	0.903516
Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.931204	0.888770	0.928612	0.875373	0.911369
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.931204	0.888770	0.928612	0.875373	0.911369
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.702617	0.674664	0.708782	0.662291	0.694226
TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.573625	0.546463	0.570117	0.539446	0.560893
5 Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.932051	0.874763	0.918157	0.863970	0.891217
Houari et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.940770	0.882525	0.926543	0.870190	0.909225
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.940770	0.882525	0.926543	0.870190	0.909225
Zenkour and Alghamdi ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [142]	0.709315	0.669326	0.706821	0.657748	0.692220
TPT ($\varepsilon_{zz} = 0$) [142]	0.579530	0.542724	0.568771	0.536526	0.559642

3.7.2 Phân tích ổn định

Để kiểm chứng kết quả nghiên cứu trong phần này, luận án cũng so sánh giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) cho tấm FGM thông thường (loại A) với tỉ số cạnh và chiều dày tấm, tỉ số cạnh trên cạnh và hệ số đặc trưng vật liệu (p) thay đổi dưới tác dụng của tải phân bố hình sin. Kết quả lời giải được sự so sánh với lời giải HSDT, kể cả kết quả ổn định trong tấm khi xét sự ảnh hưởng do thay đổi nhiệt độ (**Bảng 3.13, 3.14 và 3.15**). **Hình 3.7 và 3.8** biểu diễn ảnh hưởng về tỉ lệ cạnh trên chiều dày (a/h), tỉ lệ cạnh trên cạnh (a/b) của tấm loại A khi xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} \neq 0$). **Bảng 3.16** kiểm chứng ổn định nhiệt ứng với trường hợp tấm liên kết ngàm và tựa đơn.

Bảng 3.13: Giá trị lực tới hạn do tải trọng cơ (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) tựa đơn

γ	a/b	a/h	Tham khảo	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$	$p=10$	
0	0.5	5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	6.7204	4.4221	3.4164	2.6450	2.1479	1.9210	
			TPT [152]	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	
		10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	7.4053	4.8190	3.7111	2.8896	2.4163	2.1897	
			TPT [152]	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896	
	1.0	5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	16.0216	10.6215	8.2247	6.3430	5.0513	4.4800	
			TPT [152]	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	
		10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	18.5786	12.1181	9.3391	7.2630	6.0346	5.4530	
			TPT [152]	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	
	1	0.5	5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	5.3763	3.5377	2.7331	2.1160	1.7183	1.5368
				TPT [152]	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
			10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	5.9243	3.8552	2.9689	2.3117	1.9330	1.7517
				TPT [152]	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517
1.0		5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	6.0794	3.9438	3.0344	2.3665	1.9955	1.8153	
			TPT [152]	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152	
		10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	8.0108	5.3108	4.1124	3.1715	2.5256	2.2400	
			TPT [152]	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403	
20		5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	9.2893	6.0590	4.6696	3.6315	3.0173	2.7265	
			TPT [152]	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	
		10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	9.6764	6.2808	4.8337	3.7686	3.1723	2.8837	
			TPT [152]	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	

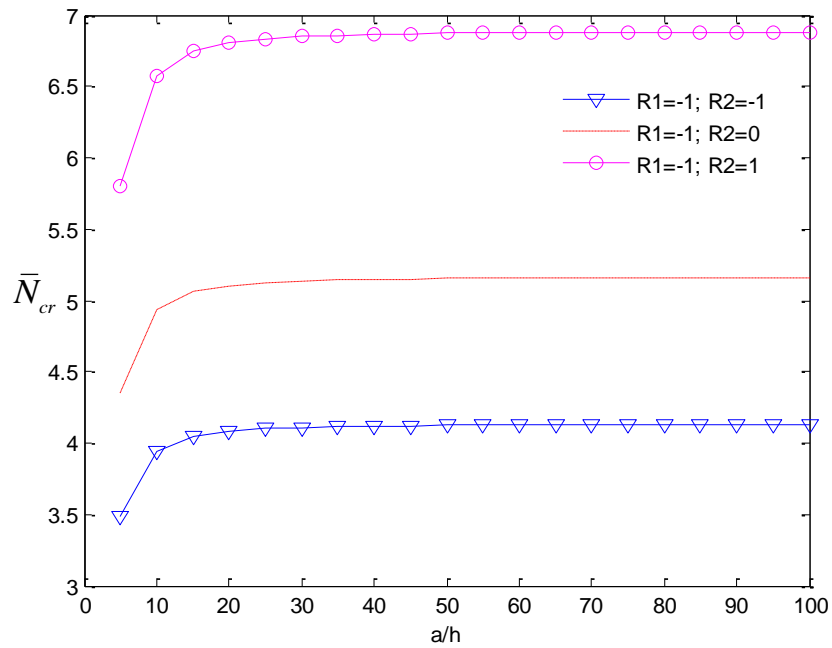
Bảng 3.14: Giá trị lực tới hạn do tải trọng nhiệt ($T_{cr} \times 10^3$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi đều ($a/h = 100$)

P	Tham khảo	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	17.1008	42.7520	85.5066	145.3645	222.3309
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	17.0880	42.6854	85.2531	144.6477	220.6694
	SPT [51]	17.0894	42.6876	85.2554	144.6500	220.6729
	HPT [51]	17.0894	42.6875	85.2551	144.6490	220.6706
	FPT [51]	17.0894	42.6875	85.2551	144.6489	220.6704
	CPT [51]	17.0991	42.7477	85.4955	145.3424	222.2883
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	8.1818	20.4544	40.9114	69.5526	106.3757
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	7.9386	19.8349	39.6237	67.2486	102.6355
	SPT [51]	7.9400	19.8359	39.6249	67.2510	102.6365
	HPT [51]	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6356
	FPT [51]	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6355
	CPT [51]	7.9437	19.8594	39.7188	67.5220	103.2690
2	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	7.3651	18.4166	36.8333	62.6150	95.7645
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	7.0374	17.5821	35.1232	59.6019	90.9491
	SPT [51]	7.0390	17.5840	35.1233	59.6034	90.9501
	HPT [51]	7.0390	17.5840	35.1234	59.6037	90.9508

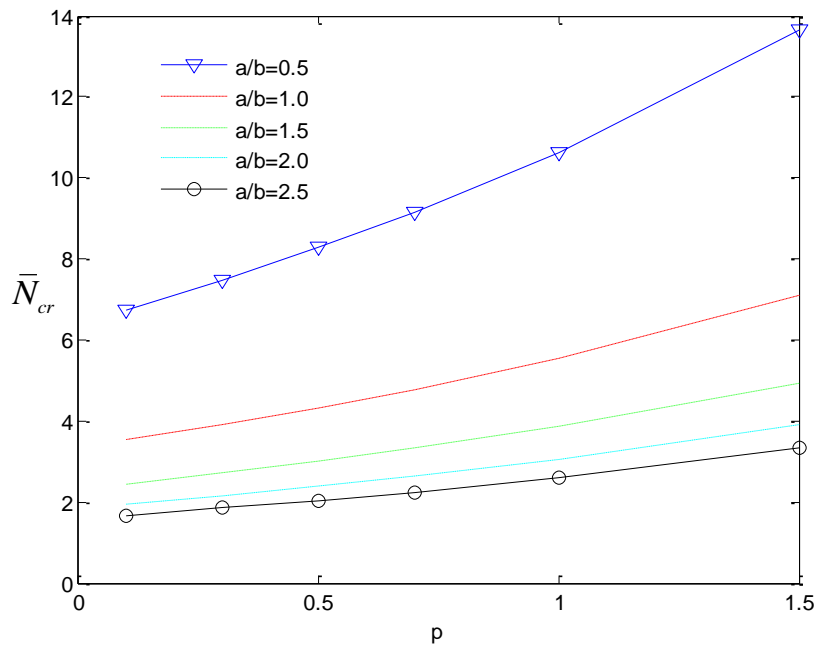
	FPT [51]	7.0392	17.5853	35.1285	59.6184	91.9850
	CPT [51]	7.0426	17.6065	35.2130	59.8621	91.5538
5	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	7.5597	18.8979	37.7958	64.2483	98.2528
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	7.2602	18.1325	36.2010	61.3939	93.6038
	SPT [51]	7.2606	18.1324	36.2014	61.3921	93.5999
	HPT [51]	7.2606	18.1327	36.2025	61.3951	93.6069
	FPT [51]	7.2615	18.1380	36.2236	61.4559	93.7481
	CPT [51]	7.2657	18.1642	36.3285	61.7585	94.4542
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	7.6467	19.1206	38.2387	64.9984	99.3971
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	7.4624	18.6342	37.1994	63.0682	96.1203
	SPT [51]	7.4634	18.6365	37.2001	63.0673	96.1183
	HPT [51]	7.4634	18.6366	37.2006	63.0687	96.1213
	FPT [51]	7.4644	18.6427	37.2246	63.1378	96.2820
	CPT [51]	7.4692	18.6731	37.3463	63.4888	97.1005

Bảng 3.15: Giá trị lực tới hạn do tải trọng nhiệt ($T_{cr} \times 10^3$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi phi tuyến ($a/h = 10, T_b = 5^\circ\text{C}$)

P	Tham khảo	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	5.1183	10.2366	18.7672	12.8283	25.6566	47.0372	25.6985	51.3970	94.2279
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	4.8411	9.6821	17.7506	11.2271	22.4542	41.1661	20.0075	40.0151	73.3609
	SPT [51]	4.8414	9.6829	17.7520	11.2294	22.4589	41.1747	20.0164	40.0328	73.3935
	HPT [51]	4.8410	9.6821	17.7505	11.2269	22.4538	41.1568	20.0066	40.0133	73.3577
	FPT [51]	4.8408	9.6817	17.7498	11.2246	22.4492	46.9675	19.9919	39.9838	73.3037
	CPT [51]	5.1147	10.2294	18.7540	12.8093	25.6186	46.9675	25.6336	51.2673	93.9900
1	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	2.2751	4.6633	8.8450	5.7126	11.7091	22.2092	11.4496	23.4681	44.5131
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	2.1066	4.3180	8.1901	4.9509	10.1478	19.2478	8.9677	18.3809	34.8640
	SPT [51]	2.1068	4.3182	8.1906	4.9517	10.1496	19.2512	8.9711	18.3880	34.8774
	HPT [51]	2.1066	4.3179	8.1900	4.9508	10.1476	19.2475	8.9673	18.3802	34.8626
	FPT [51]	2.1065	4.3178	8.1898	4.9499	10.1458	19.2440	8.9615	18.3684	34.8402
	CPT [51]	2.2072	4.5241	8.5812	5.5391	11.3534	21.5346	11.0921	22.7355	43.1235
2	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.8437	3.6000	6.7335	4.6245	9.0300	16.8901	9.2480	18.0578	33.7761
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.6766	3.2738	6.1234	3.9245	7.6630	14.3333	7.0654	13.7962	25.8050
	SPT [51]	1.6765	3.2736	6.1232	3.9243	7.6627	14.3327	7.0655	13.7962	25.8051
	HPT [51]	1.6766	3.2738	6.1235	3.9246	7.6633	14.3339	7.0659	13.7970	25.8066
	FPT [51]	1.6812	3.2828	6.1404	3.9493	7.7116	14.4242	7.1433	13.9483	26.0895
	CPT [51]	1.7627	3.4419	6.4379	4.4256	8.6417	16.1638	8.8640	17.3080	32.3737
5	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.7739	3.1670	5.5578	4.4368	7.9210	13.9008	8.8313	15.7665	27.6693
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.5962	2.8497	5.0011	3.6512	6.5185	11.4395	6.3728	11.3773	19.9665
	SPT [51]	1.5955	2.8485	4.9990	3.6479	6.5126	11.4292	6.3635	11.3609	19.9377
	HPT [51]	1.5964	2.8500	5.0017	3.6521	6.5202	11.4425	6.3755	11.3822	19.9751
	FPT [51]	1.6141	2.8816	5.0571	3.7444	6.6849	11.7317	6.6569	11.8847	20.8569
	CPT [51]	1.7083	3.0498	5.3522	4.2885	7.6562	13.4363	8.5888	15.3337	26.9097
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	1.8478	3.1788	5.2587	4.6175	7.9437	13.1413	9.1782	15.7900	26.1212
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.6769	2.8849	4.7725	3.7965	6.5314	10.8049	6.5389	11.2494	18.6099
	SPT [51]	1.6766	2.8844	4.7717	3.7953	6.5293	10.8015	6.5362	11.2448	18.6022
	HPT [51]	1.6770	2.8851	4.7728	3.7970	6.5322	10.8062	6.5402	11.2515	18.6134
	FPT [51]	1.6974	2.9202	4.8310	3.9016	6.7122	11.1040	6.8510	11.7862	19.4980
	CPT [51]	1.8092	3.1126	5.1492	4.5414	7.8130	12.9250	9.0951	15.6470	25.8848



Hình 3.7: Ảnh hưởng tỉ số cạnh và chiều dày (a/h) đối với các lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) khác nhau của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A)

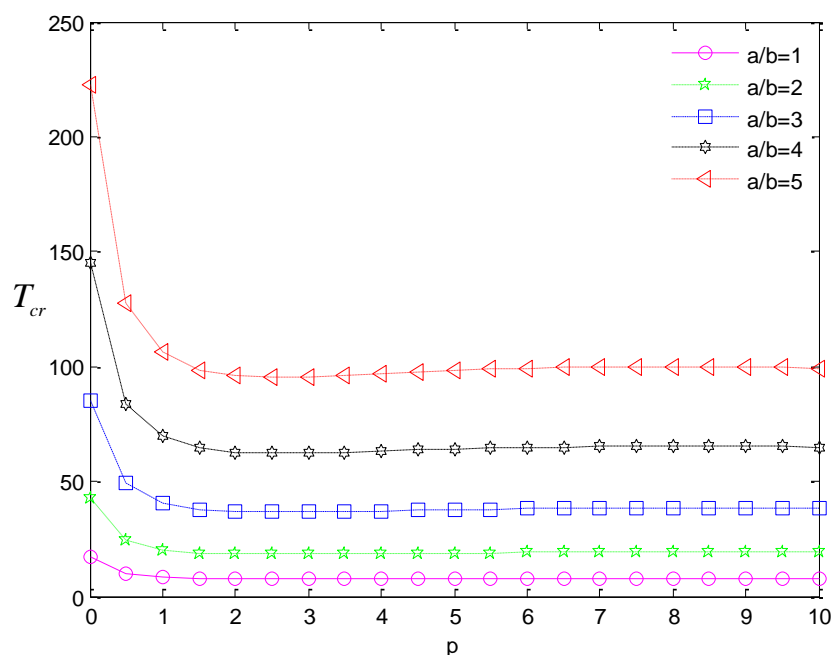


Hình 3.8: Ảnh hưởng tỉ số 2 cạnh (a/b) đối với các lực tới hạn do tải trọng cơ (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A)

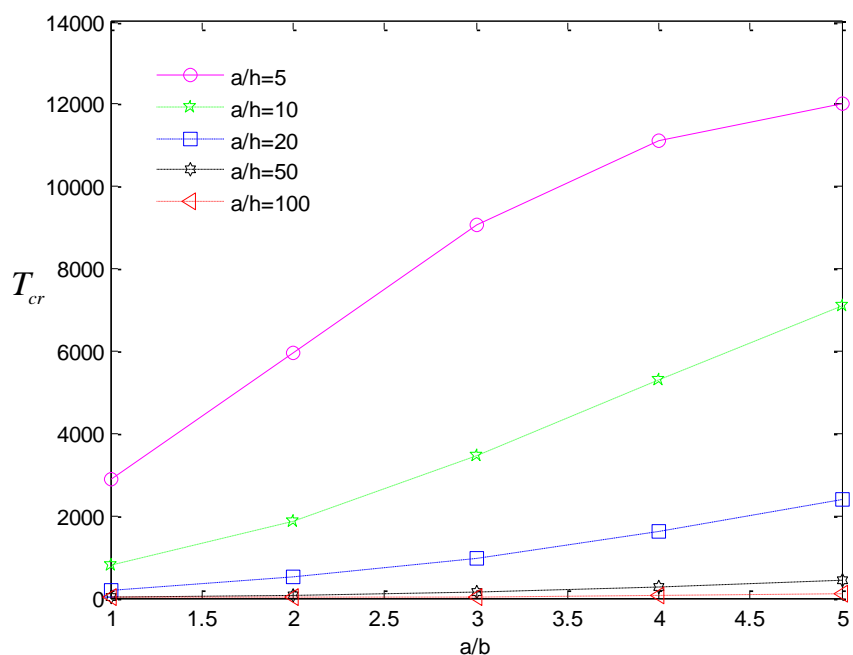
Bảng 3.16: Giá trị lực tới hạn do tải trọng nhiệt ($T_{cr} \times 10^3$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông khi nhiệt độ thay đổi đều

ĐKB	a/h	Tham khảo	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$
SSSS	50	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	68.2419	38.6765	31.7133	28.1114	28.9818
		ES-FEM [153]	70.6998	39.4860	32.2723	28.5288	29.3283
		ED ₄₄₄ [154]	68.2055	38.6553	31.6979	28.0962	28.9625
		FPT [155]	67.915	38.278	31.185	29.653	29.608
	100	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	17.0880	9.6819	7.9386	7.0374	7.2602
		ES-FEM [153]	17.7187	9.8946	8.0867	7.1492	7.3515
		ED ₄₄₄ [154]	17.0871	9.6821	7.9389	7.0379	7.2594
		FPT [155]	17.361	9.805	7.944	6.925	7.423
CCCC	50	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	179.1078	101.5526	83.2845	73.8099	75.9987
		ES-FEM [153]	188.2834	105.2699	86.0739	76.0781	78.0599
		ED ₂₂₂ [154]	185.8634	105.5901	86.6282	76.7304	78.8096
		FPT [155]	175.817	99.162	82.357	71.013	74.591
	100	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	44.9741	25.4874	20.8973	18.5267	19.1027
		ES-FEM [153]	47.4967	26.5411	21.6980	19.1804	19.7017
		ED ₂₂₂ [154]	48.0005	27.2915	22.4017	19.8472	20.3664
		FPT [155]	44.171	24.899	20.771	18.489	19.150

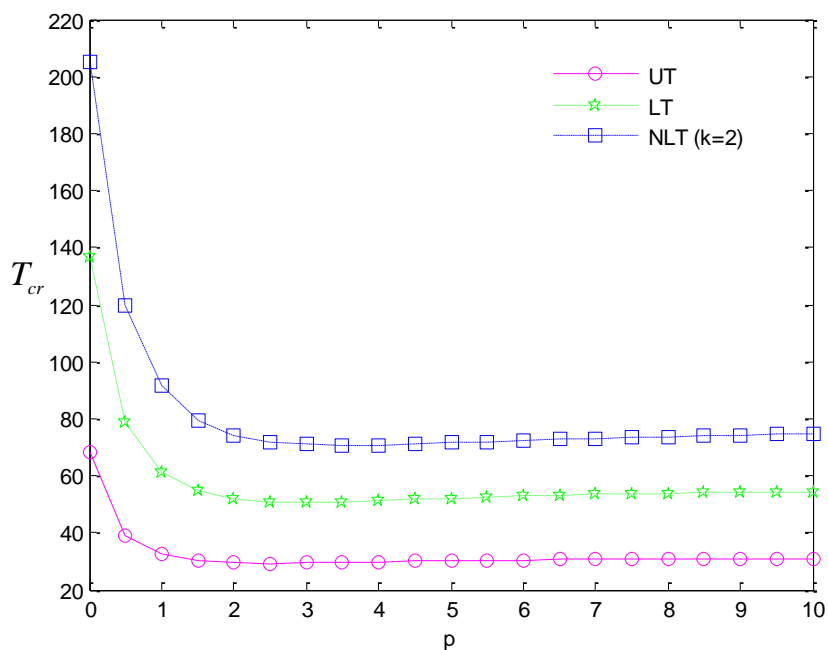
Để đánh giá ảnh hưởng của nhiệt độ lên kết cấu tấm cho bài toán Quasi-3D, luận án khảo sát thành phần lực tới hạn do tải trọng nhiệt (T_{cr}) cho tấm FGM thông thường (loại A) ứng với tỉ số hai cạnh, hệ số đặc trưng vật liệu (p) và tỉ số giữa cạnh trên chiều dày tấm thay đổi cho trường hợp nhiệt độ thay đổi đều (**Hình 3.9** và **3.10**). Tương tự, **Hình 3.11** xét các trường nhiệt độ thay đổi đều (UT), tuyến tính (LT) và phi tuyến (NLT) ứng với các hệ số đặc trưng vật liệu (p) thay đổi.



Hình 3.9: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A, $p=2$, $a/h=100$) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi đều



Hình 3.10: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A, $p = 0.5$) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi đều



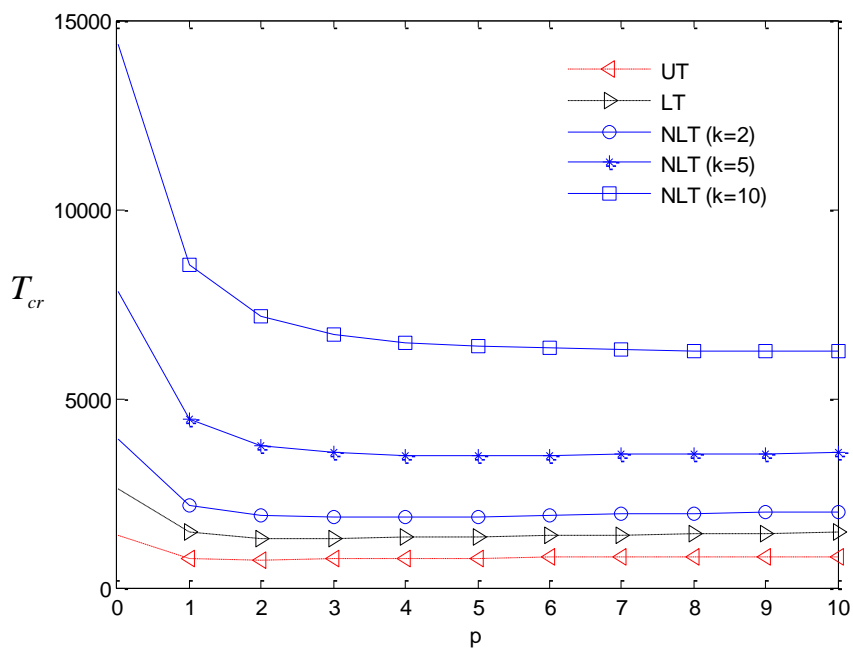
Hình 3.11: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A, $a/h = 50$) hình vuông tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi khác nhau

Đối với trường hợp bài toán tấm loại B, luận án khảo sát ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), tỉ số cạnh trên chiều dày và cấu trúc của tấm đối với thành phần lực tới hạn do tải trọng cơ (N_{cr}) trường hợp không xét biến dạng theo chiều dày tấm được thể hiện trong **Bảng 3.17**. Các giá trị trong bảng này là khá mới vì không

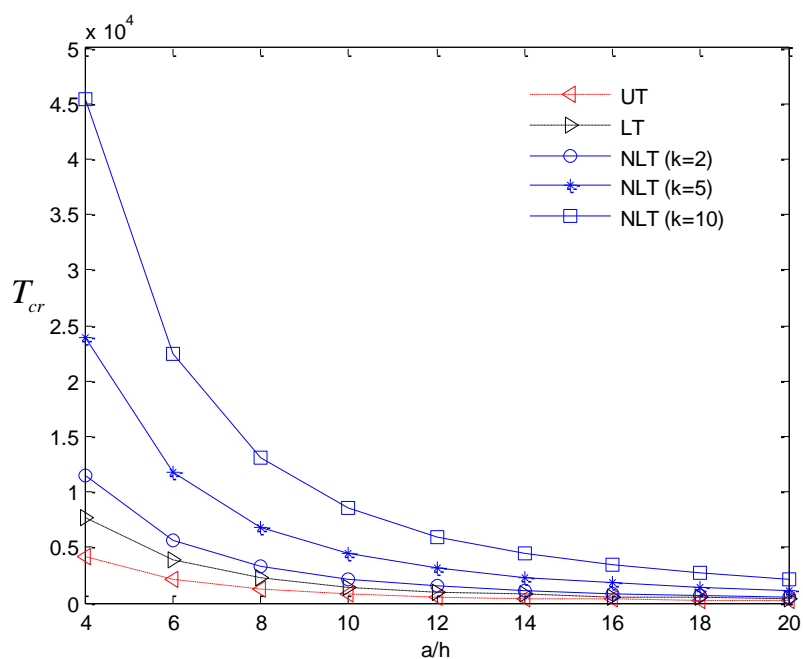
tìm được lời giải tương thích để so sánh kết quả. **Hình 3.12, 3.13** và **3.14** khảo sát ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), tỉ số cạnh trên chiều dày và tỉ lệ hai cạnh của tấm ứng với trường nhiệt độ thay đổi đều, tuyến tính và phi tuyến cho bài toán Quasi-3D.

Bảng 3.17: Giá trị lực tới hạn do tải trọng cơ (\bar{N}_{cr}) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại B) hình vuông tựa đơn

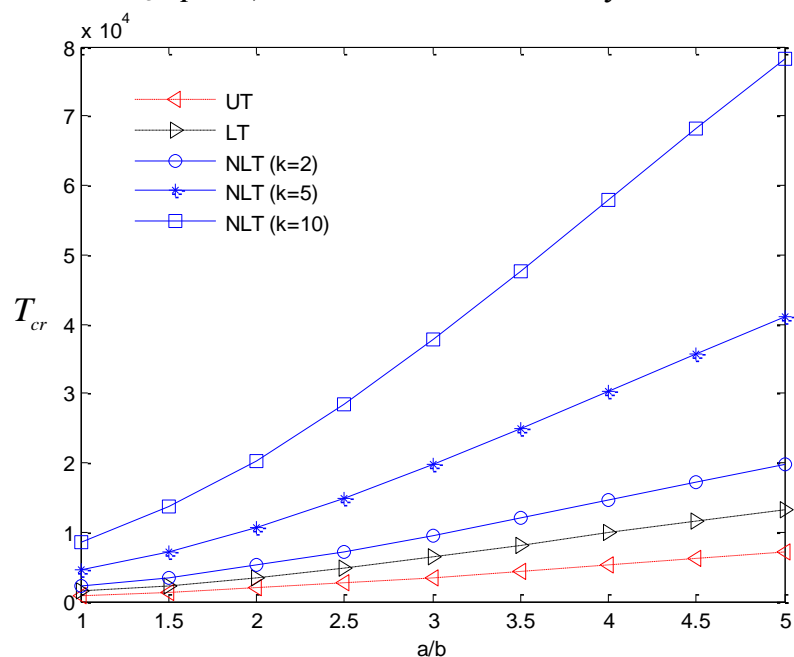
γ	a/h	Cấu trúc	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=5$	$p=10$
1	5	1-1-1	2.0513	2.2342	2.3333	2.5978	2.6834
		1-2-1	1.9456	2.2725	2.4387	2.8964	3.0545
		2-2-1	2.1369	2.5023	2.7056	3.2351	3.4009
10	10	1-1-1	2.3508	2.5165	2.6123	2.8848	2.9773
		1-2-1	2.3095	2.5768	2.7322	3.2063	3.3816
		2-2-1	2.3928	2.7898	3.0116	3.6028	3.7937
100	100	1-1-1	2.4773	2.6308	2.7236	2.9969	3.0918
		1-2-1	2.4730	2.7015	2.8495	3.3268	3.5087
		2-2-1	2.4963	2.9038	3.1320	3.7467	3.9476



Hình 3.12: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (PGM, loại B Al/Al₂O₃, $a/h = 10$) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi khác nhau



Hình 3.13: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (PGM, loại B, Al/Al_2O_3 , $p = 1$) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi khác nhau

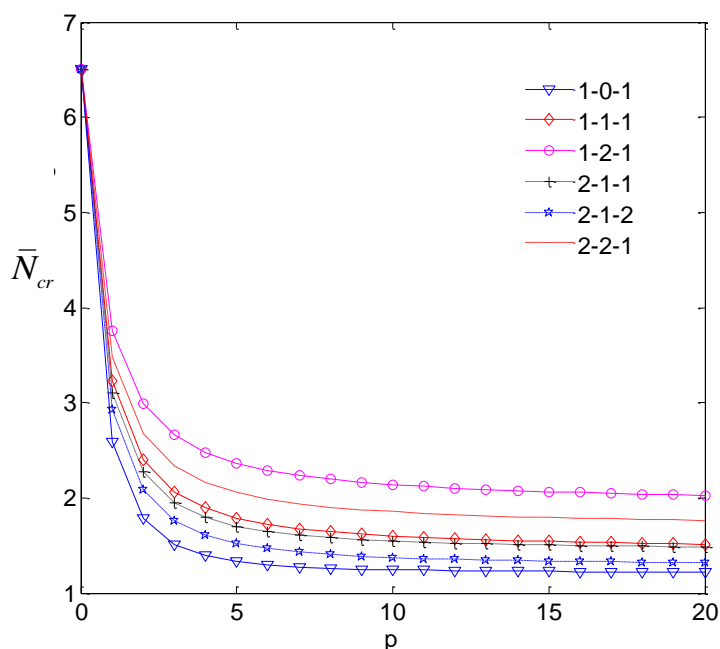


Hình 3.14: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm (1-8-1) sandwich FGM (PGM, loại B, Al/Al_2O_3 , $p = 1$, $a/h = 10$) tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi khác nhau

Tấm loại C của bài toán phân tích lực tới hạn cũng được kiểm chứng trong **Bảng 3.18** trường hợp không xét biến dạng theo chiều dày tấm. **Hình 3.15** biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), cấu trúc phân lớp của tấm loại C khi không xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} = 0$).

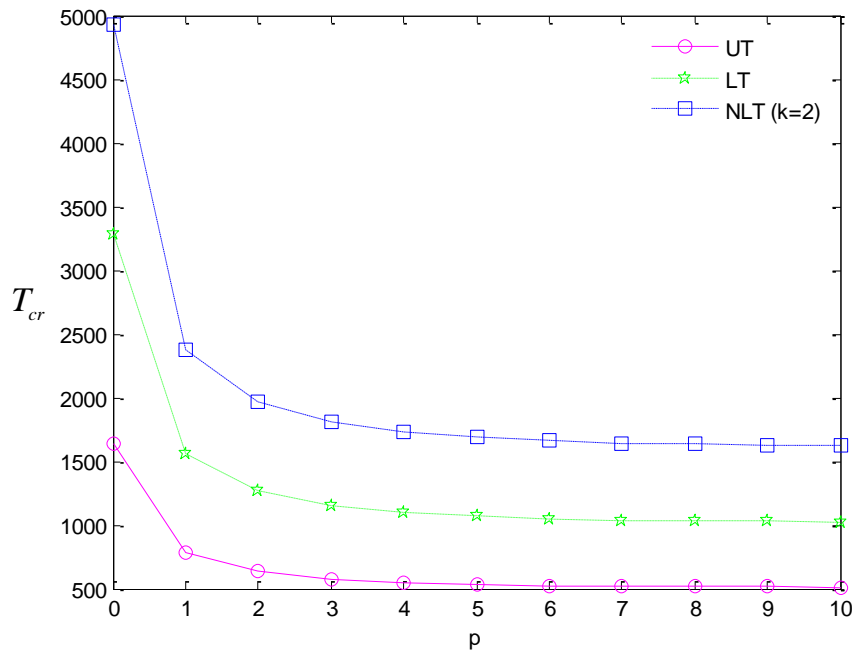
Bảng 3.18: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10, \gamma = 1$)

p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566	6.50566
	Zenkour [132] (TPT)	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	Zenkour [132] (SPT)	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303	6.50303
	Meiche et al [133] (HPT)	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276	6.50276
	Neves et al [134] (HSPT)	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266	6.50266
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652	6.47652
1.0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	2.58410	2.92060	3.09759	3.23299	3.47544	3.75403
	Zenkour [132] (TPT)	2.58357	2.92003	3.09697	3.23237	3.47472	3.75328
	Zenkour [132] (SPT)	2.58423	2.92060	3.09731	3.23270	3.47490	3.75314
	Meiche et al [133] (HPT)	2.58315	2.91970	3.09686	3.23225	3.47476	3.75359
	Neves et al [134] (HSPT)	2.53913	2.86503	3.03679	3.16779	3.40280	3.67204
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	2.53062	2.85563	3.02733	3.15750	3.39207	3.66013
5.0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.32948	1.52155	1.70203	1.79002	2.05633	2.36760
	Zenkour [132] (TPT)	1.32910	1.52129	1.70176	1.78978	2.05605	2.36734
	Zenkour [132] (SPT)	1.33003	1.52203	1.70224	1.79032	2.05644	2.36744
	Meiche et al [133] (HPT)	1.32839	1.52071	1.70140	1.78937	2.05578	2.36731
	Neves et al [134] (HSPT)	1.32331	1.50935	1.68594	1.77072	2.03078	2.33036
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	1.31829	1.50409	1.68128	1.76507	2.02534	2.32354
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.24406	1.37341	1.54622	1.59758	1.85403	2.14020
	Zenkour [132] (TPT)	1.24363	1.37316	1.54595	1.59736	1.85376	2.13995
	Zenkour [132] (SPT)	1.24475	1.37422	1.56721	1.59728	1.57287	2.19087
	Meiche et al [133] (HPT)	1.24287	1.37249	1.54556	1.59687	1.85343	2.13982
	Neves et al [134] (HSPT)	1.24090	1.36547	1.53468	1.58421	1.83573	2.10897
	Neves et al [134] (Quasi-3D)	1.23599	1.36044	1.53036	1.57893	1.83083	2.10275

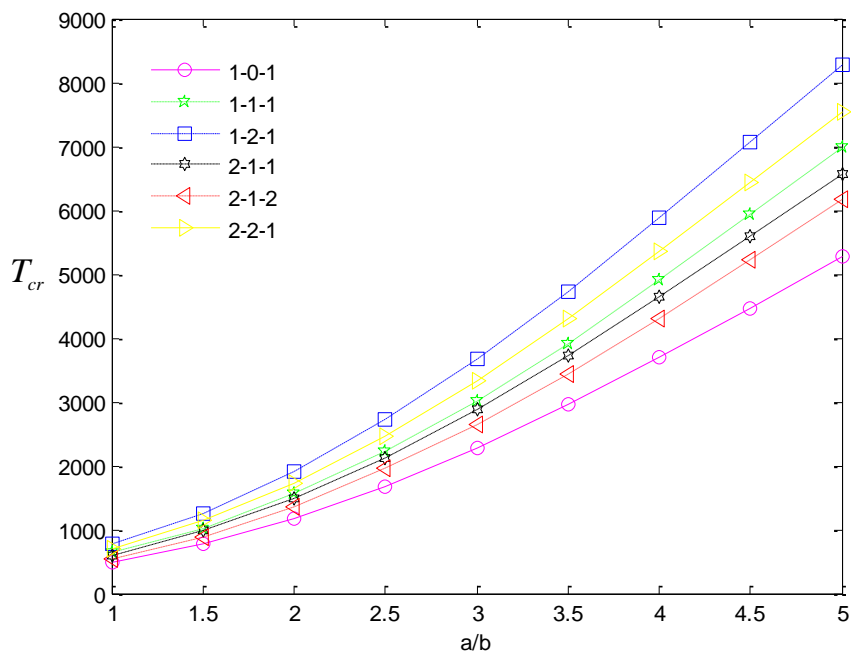


Hình 3.15: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm sandwich FGM (EGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

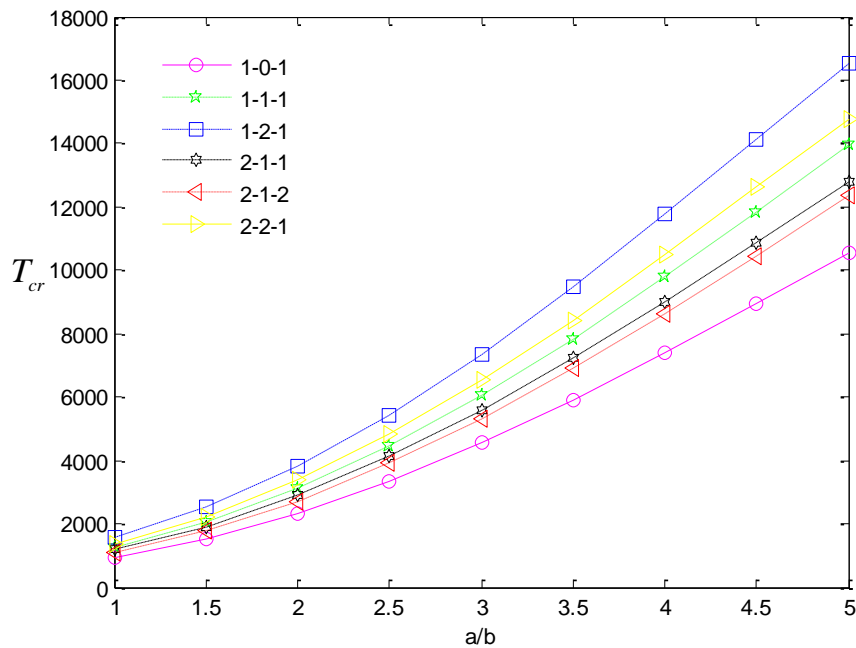
Trong phần phân tích lực tới hạn do nhiệt độ của tấm loại C, luận án xét ảnh hưởng do hệ số đặc trưng vật liệu (p), cấu trúc các phân lớp trong tấm trong các trường nhiệt độ thay đổi khác nhau và có kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) (**Hình 3.16** và **3.17**).



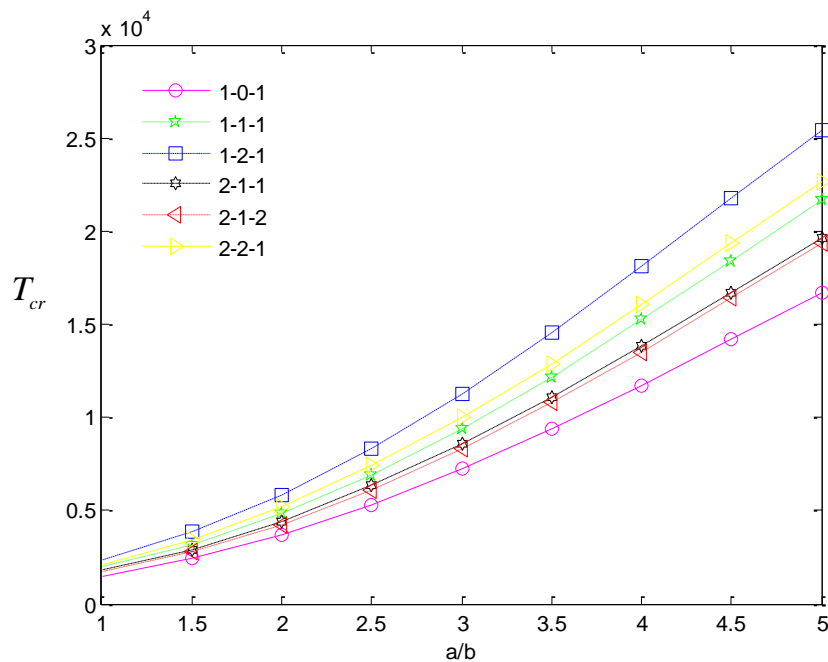
Hình 3.16: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm (1-1-1) sandwich FGM (PGM, loại C, Al/Al₂O₃, lõi cứng) hình vuông tựa đơn khi nhiệt độ thay đổi khác nhau ($a/h = 10$)



(a) Nhiệt độ thay đổi đều (UT)



(b) Nhiệt độ thay đổi tuyến tính (LT)



(c) Nhiệt độ thay đổi phi tuyến (NLT)

Hình 3.17: Giá trị lực tới hạn (T_{cr}) của tấm sandwich FGM (PGM, loại C, Al/Al₂O₃, lõi cứng, $p = 2, k = 2$) tựa đơn ($a/h = 10$)

Cuối cùng, trong phần phân tích lực tới hạn cho tấm loại C trong trường hợp điều kiện biên không phải tựa đơn, luận án dùng lời giải Ritz để phân tích. Trước tiên, luận án khảo sát sự hội tụ (kết quả tin cậy) của bài toán thông qua **Bảng 3.19** cho trường hợp không xét biến dạng theo chiều dày tấm và đồng thời kết hợp so sánh

bài toán sử dụng hàm biến dạng cắt bậc cao mới của luận án (NPT) đã phát triển với các bài toán sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác nhau: TPT (hàm đa thức bậc 3) và SPT (hàm lượng giác). Tác giả nhận thấy, đối với tấm tựa đơn (SSSS) thì kết quả hội tụ tại giá trị: $m = 1, n = 1$, còn đối với tấm bốn biên ngàm (CCCC) thì giá trị hội tụ: $m = 5, n = 5$. Bên cạnh đó, giá trị tính toán của luận án rất gần với các lời giải sử dụng hàm biến dạng cắt TPT và SPT. Luận án tiếp tục so sánh kết quả với Neves và cộng sự [148], Thai và cộng sự [94] (**Bảng 3.20**).

Bảng 3.19: Khảo sát sự hội tụ của lực tới hạn do tải cơ (\hat{N}_{cr}) của tấm sandwich FGM (PGM,

Al/Al₂O₃, loại C, 2-1-2, lõi cứng) hình vuông ($a/h = 10, \gamma = 1, \varepsilon_{zz} = 0$)

ĐKB	(m, n)	$p = 0$			$p = 5$			$p = 10$		
		TPT	SPT	NPT	TPT	SPT	NPT	TPT	SPT	NPT
SSSS	(1,1)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
	(2,2)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
	(3,3)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
	(4,4)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
	(5,5)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
	(6,6)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
	(7,7)	6.5025	6.5030	6.5025	1.5213	1.5220	1.5214	1.3731	1.3740	1.3733
CCCC	(1,1)	15.9136	15.9175	15.9139	3.9179	3.9229	3.9189	3.5386	3.5442	3.5397
	(2,2)	15.9136	15.9175	15.9139	3.9179	3.9229	3.9189	3.5386	3.5442	3.5397
	(3,3)	15.9080	15.9136	15.9084	3.9165	3.9214	3.9177	3.5376	3.5437	3.5382
	(4,4)	15.9041	15.9080	15.9044	3.9154	3.9203	3.9163	3.5363	3.5419	3.5374
	(5,5)	15.9037	15.9076	15.9040	3.9153	3.9202	3.9162	3.5362	3.5418	3.5373
	(6,6)	15.9037	15.9076	15.9040	3.9153	3.9202	3.9162	3.5362	3.5418	3.5373
	(7,7)	15.9037	15.9076	15.9040	3.9153	3.9202	3.9162	3.5362	3.5418	3.5373

Bảng 3.20: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông ($a/h = 10, \gamma = 1, \varepsilon_{zz} = 0$)

ĐKB	p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	Luận án Ritz ($\varepsilon_{zz} = 0$)	6.50251	6.50251	6.50251	6.50251	6.50251
		Luận án Navier ($\varepsilon_{zz} = 0$)	6.50251	6.50251	6.50251	6.50251	6.50251
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} = 0$) [148]	6.50254	6.50254	6.50254	6.50254	6.50254
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [148]	6.47643	6.47643	6.47643	6.47643	6.47643
		Thai et al (FSDT) [94]	6.50220	6.50220	6.50220	6.50220	6.50220
1	1	Luận án Ritz ($\varepsilon_{zz} = 0$)	2.58369	2.92013	3.23241	3.47473	3.75323
		Luận án Navier ($\varepsilon_{zz} = 0$)	2.58369	2.92013	3.23241	3.47473	3.75323
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} = 0$) [148]	2.53924	2.86511	3.16778	3.40274	3.67183
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [148]	2.53069	2.85568	3.15750	3.39202	3.65998
		Thai et al (FSDT) [94]	2.58240	2.91930	3.23200	3.47420	3.75280
5	5	Luận án Ritz ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.32932	1.52144	1.78989	2.05612	2.36735
		Luận án Navier ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.32932	1.52144	1.78989	2.05612	2.36735

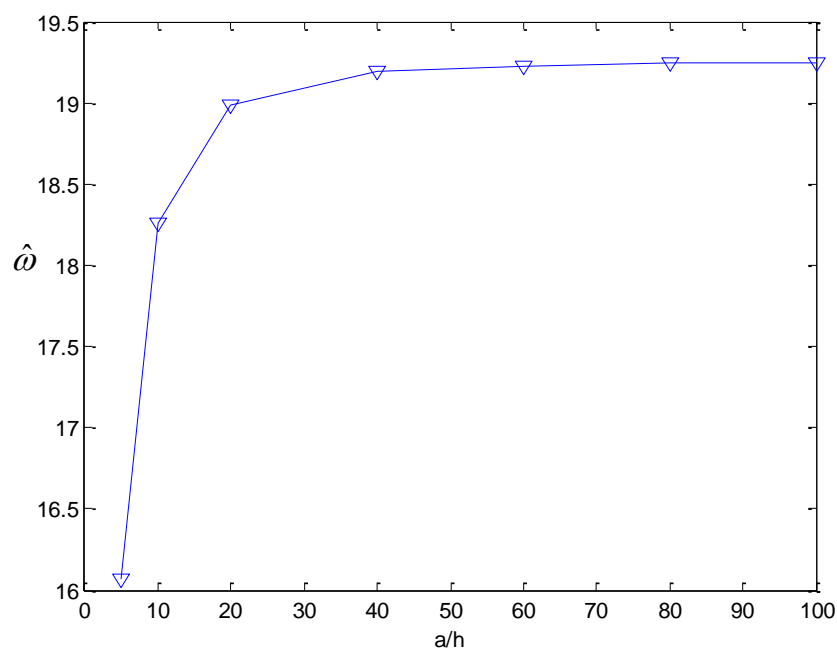
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} = 0$) [148]	1.32340	1.50933	1.77074	2.03081	2.33029
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [148]	1.31826	1.50395	1.76502	2.02535	2.32351
		Thai et al (FSDT) [94]	1.32080	1.51410	1.78550	2.05120	2.36520
	10	Luận án Ritz ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.24384	1.37331	1.59747	1.85386	2.14001
		Luận án Navier ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.24384	1.37331	1.59747	1.85386	2.14001
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} = 0$) [148]	1.24109	1.36540	1.58419	1.83576	2.10896
		Neves et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [148]	1.23608	1.36023	1.57880	1.83083	2.10275
		Thai et al (FSDT) [94]	1.23330	1.36120	1.58970	1.84500	2.13640
CCCC	0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	15.9139	15.9139	15.9139	15.9139	15.9139
		Thai et al. (FSDT) [94]	15.9226	15.9226	15.9226	15.9226	15.9226
	1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	6.54655	7.39815	8.17136	8.75748	9.43980
		Thai et al (FSDT) [94]	6.54340	7.39900	8.17530	8.76120	9.44430
	5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	3.39243	3.91888	4.60625	5.26967	6.05338
		Thai et al (FSDT) [94]	3.34000	3.87380	4.58130	5.24170	6.04450
	10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	3.14660	3.53967	4.12089	4.76227	5.48856
		Thai et al (FSDT) [94]	3.08250	3.46290	4.07320	4.70840	5.46960

3.7.3 Phân tích dao động tự do

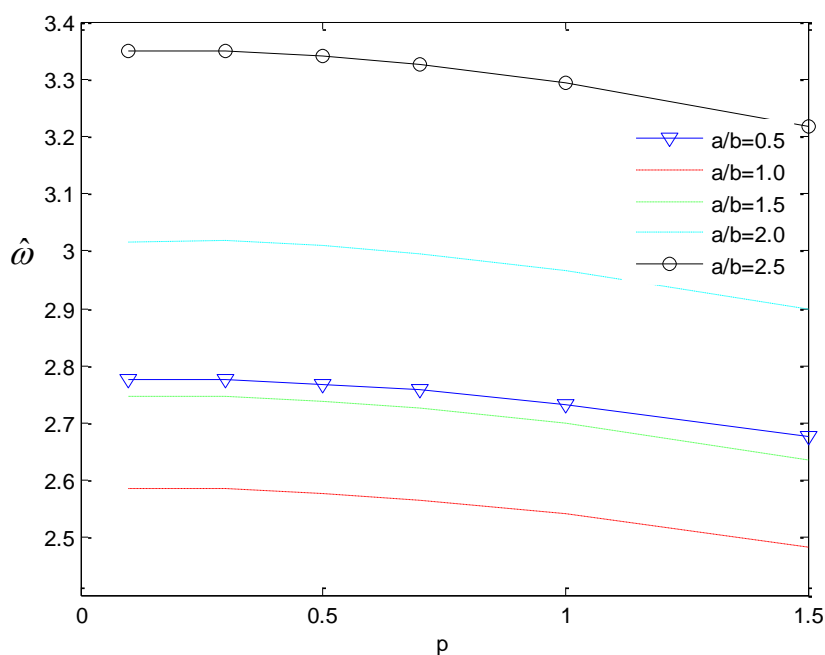
Khảo sát giá trị tần số dao động riêng của tấm FGM thông thường (loại A) hình vuông với tỉ số cạnh trên chiều dày tấm (a/h) và các hệ số đặc trưng vật liệu (p) thay đổi khác nhau. Kết quả luận án được sự so sánh với lời giải chính xác 3D [156] (Bảng 3.21). Hình 3.18 và 3.19 biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), tỉ số hai cạnh (a/b) và tỉ số cạnh trên chiều dày (a/h) của tấm loại A khi xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).

Bảng 3.21: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al*/ZrO₂, loại A) hình vuông tựa đơn ($\varepsilon_{zz} = 0$)

a/h	Tham khảo	$p = 0$	$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
2	Luận án Ritz	1.2454	1.2162	1.1913	1.1356	1.0784	1.0234	0.9685	0.9435
	Luận án Navier	1.2454	1.2162	1.1913	1.1356	1.0784	1.0234	0.9685	0.9435
	3D [156]	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
5	Luận án Ritz	1.7683	1.7208	1.6818	1.5974	1.5212	1.4601	1.4058	1.3690
	Luận án Navier	1.7683	1.7208	1.6818	1.5974	1.5212	1.4601	1.4058	1.3690
	3D [156]	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
10	Luận án Ritz	1.9317	1.8773	1.8332	1.7393	1.6583	1.5986	1.5492	1.5083
	Luận án Navier	1.9317	1.8773	1.8332	1.7393	1.6583	1.5986	1.5492	1.5083
	3D [156]	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066
20	Luận án Ritz	1.9821	1.9254	1.8797	1.7827	1.7003	1.6415	1.5943	1.5521
	Luận án Navier	1.9821	1.9254	1.8797	1.7827	1.7003	1.6415	1.5943	1.5521
	3D [156]	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
50	Luận án Ritz	1.9971	1.9397	1.8935	1.7956	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
	Luận án Navier	1.9971	1.9397	1.8935	1.7956	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
	3D [156]	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
100	Luận án Ritz	1.9993	1.9418	1.8955	1.7975	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	Luận án Navier	1.9993	1.9418	1.8955	1.7975	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	3D [156]	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652



Hình 3.18: Ảnh hưởng tỉ số cạnh và chiều dày (a/h) đối với tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al*/ZrO₂, loại A) ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)

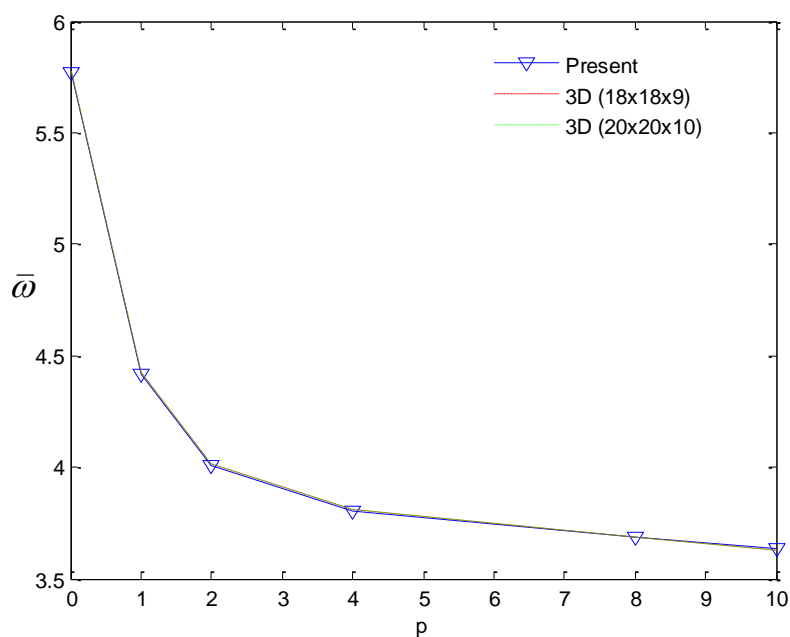


Hình 3.19: Ảnh hưởng tỉ số cạnh và cạnh (a/b) và (p) đối với tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al*/ZrO₂, loại A) ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)

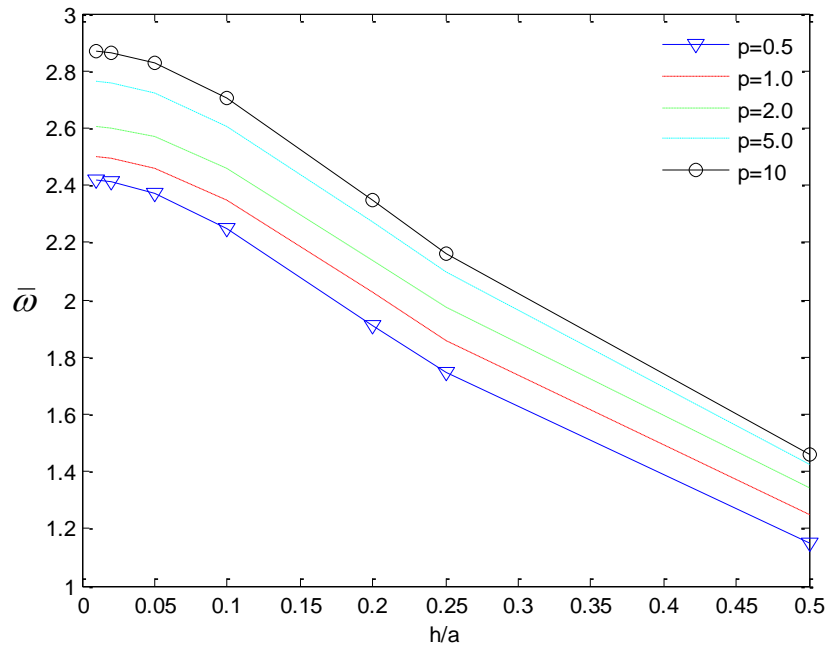
L luận án cũng tiến hành phân tích tần số dao động của tấm khi dùng lời giải Ritz cho tấm loại A và được so sánh với lời giải 3D của Jin và cộng sự [157] (**Bảng 3.22** và **Hình 3.20**). **Hình 3.21** thể hiện ảnh hưởng của tỉ số h/a và giá trị p đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm có bốn biên liên kết ngàm.

Bảng 3.22: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông tựa đơn

h/a	Tham khảo	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=4$	$p=8$	$p=10$
0.1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	5.7694	4.4192	4.0089	3.8069	3.6846	3.6369
	Jin et al (3D) [157]	5.7776	4.4264	4.0142	3.8106	3.6895	3.6266
0.2	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	5.2814	4.0781	3.6805	3.4453	3.2962	3.2512
	Jin et al (3D) [157]	5.3038	4.0991	3.6962	3.4560	3.3092	3.2522
0.5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	3.7195	2.9428	2.6250	2.3690	2.1999	2.1643
	Jin et al (3D) [157]	3.7602	2.9901	2.6660	2.3980	2.2221	2.1801



Hình 3.20: Ảnh hưởng hệ số đặc trưng vật liệu (p) đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) tựa đơn ($\varepsilon_{zz} = 0$)



Hình 3.21: Ảnh hưởng tỉ số (h/a) đối với tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) bốn biên ngàm ($\varepsilon_{zz} = 0$)

Ngoài ra, để khảo sát lại giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}_1$) của một số modes ban đầu của tấm đồng nhất (Al₂O₃) khi chịu tải trọng do nhiệt độ luận án sử dụng hàm biến dạng cắt đề xuất (NPT) so sánh một số hàm biến dạng cắt bậc cao đã phát triển và với các lời khác [140] (**Bảng 3.23**) để thấy được những điểm nổi bật của luận án. Tương tự, luận án cũng phân tích cho tấm FGM (loại A) và so sánh với tác giả Mohammed Sobhy [140] và Baferani và cộng sự [158] trong **Bảng 3.24**, các kết quả luận án có được là tương đối phù hợp với hai tác giả này.

Bảng 3.23: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}_1$) của tấm đồng nhất (Al₂O₃) hình vuông ($a/h = 10, \Delta T = 0, \varepsilon_{zz} \neq 0$)

(m, n)	Lời giải chính xác	Luận án (NPT)	RPT [140]	TPT [140]	SPT [140]	HPT1 [140]	EPT [140]	HPT2 [140]
(1,1)	0.09315	0.09303 (-0.13%)	0.09315 (0%)	0.09303 (-0.13%)	0.09303 (-0.13%)	0.09303 (-0.13%)	0.09304 (-0.12%)	0.09304 (-0.12%)
(1,2)	0.22260	0.22190 (-0.31%)	0.22261 (0%)	0.22195 (-0.29%)	0.22198 (-0.28%)	0.22195 (-0.29%)	0.22204 (-0.25%)	0.22200 (-0.27%)
(2,2)	0.34207	0.34092	0.34215	0.34063	0.34069	0.34063	0.34084	0.34075
(1,3)	0.41714	0.41585	0.41729	0.41507	0.41516	0.41507	0.41538	0.41524
(2,3)	0.52391	0.52107	0.52424	0.52081	0.52096	0.52081	0.52131	0.52109
(3,3)	0.68893	0.68511	0.68974	0.68396	0.68423	0.68395	0.68483	0.68445
(2,4)	0.75111	0.74603	0.75217	0.74536	0.74569	0.74535	0.74640	0.74596
(1,5)	0.92678	0.92146	0.92886	0.91869	0.91922	0.91866	0.92031	0.91963
(4,4)	1.08890	1.08221	1.09232	1.07845	1.07923	1.07842	1.08074	1.07981

Kết quả trong dấu ngoặc () được so sánh với lời giải chính xác.

Bảng 3.24: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}_2$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông tựa đơn ($\Delta T = 0$)

h/a	Tham khảo	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=5$
0.05	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.0292	0.0224	0.0205	0.0196
	Mohammed Sobhy [140]	0.0291	0.0222	0.0202	0.0191
	Baferani et al [158]	0.0291	0.0227	0.0209	0.0197
0.10	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.1137	0.0872	0.0794	0.0754
	Mohammed Sobhy [140]	0.1136	0.0869	0.0789	0.0741
	Baferani et al [158]	0.1134	0.0891	0.0819	0.0767
0.15	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.2469	0.1907	0.1729	0.1621
	Mohammed Sobhy [140]	0.2461	0.1890	0.1710	0.1590
	Baferani et al [158]	0.2454	0.1939	0.1778	0.1648
0.20	Luận án ($\varepsilon_{zz} \neq 0$)	0.4178	0.3227	0.2911	0.2681
	Mohammed Sobhy [140]	0.4172	0.3219	0.2903	0.2670
	Baferani et al [158]	0.4154	0.3299	0.3016	0.2765

Bài toán tấm loại B cũng được xem xét khi khảo sát tấm hình vuông với tỉ số cạnh trên chiều dày tấm (a/h) và các hệ số đặc trưng vật liệu (p) thay đổi. Kết quả của luận án được so sánh với nghiên cứu của Natarajan và Manickam [136] (**Bảng 3.25**).

Bảng 3.25: Giá trị tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại B) hình vuông tựa đơn

a/h	Tham khảo	1-1-1			1-2-1			2-2-1		
		0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.1414	1.1561	1.1996	1.1574	1.1827	1.2569	1.1916	1.2268	1.3160
	HSDT9 [136]	1.1449	1.1639	1.2113	1.1597	1.1884	1.2644	1.1965	1.2350	1.3249
	HSDT13 [136]	1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.2359	1.2478	1.2883	1.2567	1.2763	1.3466	1.2827	1.3187	1.4130
	HSDT9 [136]	1.2373	1.2506	1.2921	1.2578	1.2785	1.3492	1.2846	1.3216	1.4161
	HSDT13 [136]	1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
100	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.2752	1.2853	1.3238	1.2984	1.3147	1.3824	1.3198	1.3558	1.4518
	HSDT9 [136]	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	HSDT13 [136]	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519

Khi phân tích tần số dao động riêng của tấm loại B với các điều kiện biên khác nhau, luận án dùng lời giải Ritz để phân tích. Kết quả lời giải được so sánh với lời giải 3D của Li và cộng sự [138] (**Bảng 3.26**).

Bảng 3.26: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1) hình vuông bốn biên tựa đơn và liên kết ngàm

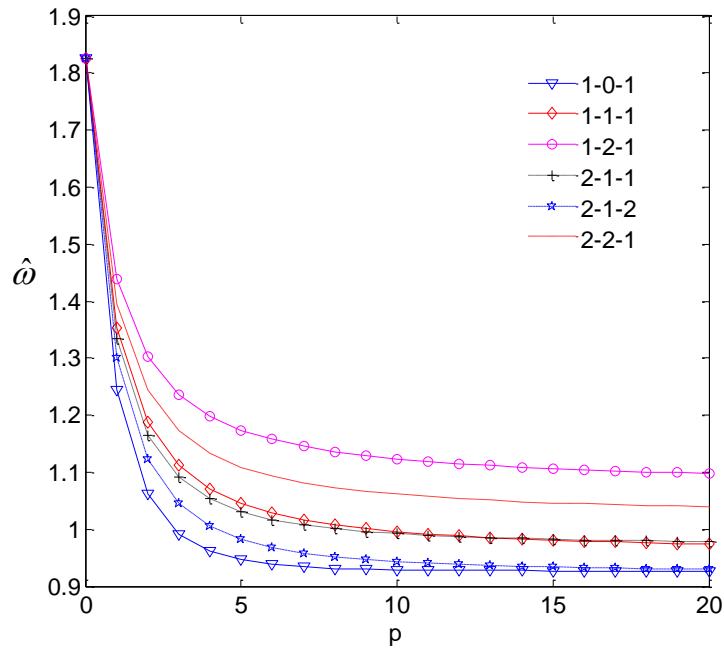
ĐKB	Tham khảo	h/b	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
SSSS	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.01	1.33990	1.38666	1.44488	1.53138	1.59098
	Li et al (3D) [138]		1.33931	1.38669	1.44491	1.53143	1.59105
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.1	1.29512	1.34525	1.40498	1.49013	1.54714

	Li et al (3D) [138]		1.29751	1.34847	1.40828	1.49309	1.54980
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.2	1.18677	1.24288	1.30494	1.38619	1.43703
	Li et al (3D) [138]		1.19580	1.25338	1.31569	1.39567	1.44540
CCCC	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.01	2.43154	2.51684	2.62260	2.77963	2.88775
	Li et al (3D) [138]		2.45438	2.54149	2.64835	2.80692	2.91611
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.1	2.26074	2.35982	2.47108	2.62130	2.71805
	Li et al (3D) [138]		2.24154	2.34606	2.45973	2.60760	2.70070
	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.2	1.91753	2.03206	2.14711	2.28062	2.35566
	Li et al (3D) [138]		1.86081	1.97993	2.09554	2.22142	2.28896

Bài toán phân tích tần số dao động riêng cho tấm loại C cũng được phân tích và so sánh với lời giải HSDT, Quasi-3D và 3D được trình bày chi tiết trong **Bảng 3.27**. Nhìn chung, các kết quả của luận án là khá phù hợp khi so sánh với các lý thuyết này. **Hình 3.22** biểu diễn ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), cấu trúc của tấm loại C khi không xét đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm ($\varepsilon_{zz} = 0$).

Bảng 3.27: Giá trị tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông bốn biên tựa đơn ($a/h = 10$)

p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489	1.82489
	Zenkour [132] (TPT)	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
	Zenkour [132] (SPT)	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452
	Meiche et al [133] (HPT)	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449	1.82449
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	1.82682	1.82682	-	1.82682	1.82682	1.82682
	Li et al [138] (3D)	1.82682	1.82682	-	1.82682	1.82682	1.82682
1.0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.24332	1.30024	1.33352	1.35345	1.39579	1.43948
	Zenkour [132] (TPT)	1.24320	1.30011	1.34888	1.35333	1.40789	1.43934
	Zenkour [132] (SPT)	1.24335	1.30023	1.34894	1.35339	1.40792	1.43931
	Meiche et al [133] (HPT)	1.24310	1.30004	1.33328	1.35331	1.39559	1.43940
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	1.24495	1.30195	-	1.35527	1.39987	1.44143
	Li et al [138] (3D)	1.24470	1.30181	-	1.35523	1.39763	1.44137
5.0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.94611	0.98193	1.03067	1.04473	1.10905	1.17403
	Zenkour [132] (TPT)	0.94598	0.98184	1.07432	1.04466	1.14731	1.17397
	Zenkour [132] (SPT)	0.94630	0.98207	1.07445	1.04481	1.14741	1.17399
	Meiche et al [133] (HPT)	0.94574	0.98166	1.03033	1.04455	1.10875	1.17397
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	0.94716	0.98311	-	1.04613	1.11723	1.17579
	Li et al [138] (3D)	0.94476	0.98103	-	1.04532	1.10983	1.17567
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.92854	0.94305	0.99219	0.99558	1.06114	1.12320
	Zenkour [132] (TPT)	0.92839	0.94297	1.03862	0.99551	1.10533	1.12314
	Zenkour [132] (SPT)	0.92875	0.94332	1.04558	0.99519	1.04154	1.13460
	Meiche et al [133] (HPT)	0.92811	0.94275	0.99184	0.99536	1.06081	1.12311
	Bessaim et al [137] (Quasi-3D)	0.92952	0.94410	-	0.99684	1.07015	1.12486
	Li et al [138] (3D)	0.92727	0.94078	-	0.99523	1.06104	1.12466



Hình 3.22: Giá trị tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (EGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng, $a/h = 10$) hình vuông tựa đơn

Khi phân tích dao động cho tấm loại C với các điều kiện biên khác nhau, luận án cũng dùng lời giải Ritz và kết quả phân tích được so sánh với lời giải Quasi-3D và 3D trong trường hợp bốn biên ngàm và bốn biên tựa đơn (**Bảng 3.28**).

Bảng 3.28: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông ($a/h = 10$)

ĐKB	p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
		Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
		Li et al (3D) [138]	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
	1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.24323	1.30013	1.35334	1.39566	1.43933
		Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	1.24495	1.30195	1.35527	1.39987	1.44143
		Li et al (3D) [138]	1.24470	1.30181	1.35523	1.39763	1.44137
	5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.94606	0.98189	1.04469	1.10899	1.17397
		Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	0.94716	0.98311	1.04613	1.11723	1.17579
		Li et al (3D) [138]	0.94476	0.98103	1.04532	1.10983	1.17567
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.92846	0.94302	0.99555	1.06110	1.12315	
	Bessaim et al (Quasi-3D) [137]	0.92952	0.94410	0.99684	1.07015	1.12486	
	Li et al (3D) [138]	0.92727	0.94078	0.99523	1.06104	1.12466	
CCCC	0	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	3.17398	3.17398	3.17398	3.17398	3.17398
		Thai et al (FSDT) [94]	3.29360	3.29360	3.29360	3.29360	3.29360
		Li et al (3D) [138]	3.13800	3.13800	3.13800	3.13800	3.13800
	1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	2.19951	2.30008	2.39165	2.46282	2.53734
		Thai et al (FSDT) [94]	2.28140	2.38640	2.48180	2.55560	2.63300
		Li et al (3D) [138]	2.19020	2.29110	2.38190	2.45110	2.53980

5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.67955	1.75105	1.86227	1.97289	2.08623
	Thai et al (FSDT) [94]	1.72930	1.80640	1.92690	2.04150	2.16290
	Li et al (3D) [138]	1.66190	1.73930	1.85790	1.96720	2.15720
10	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	1.64133	1.68225	1.77671	1.88979	1.99884
	Thai et al (FSDT) [94]	1.68580	1.72680	1.83290	1.94970	2.07030
	Li et al (3D) [138]	1.62120	1.66330	1.76860	1.88080	1.99860

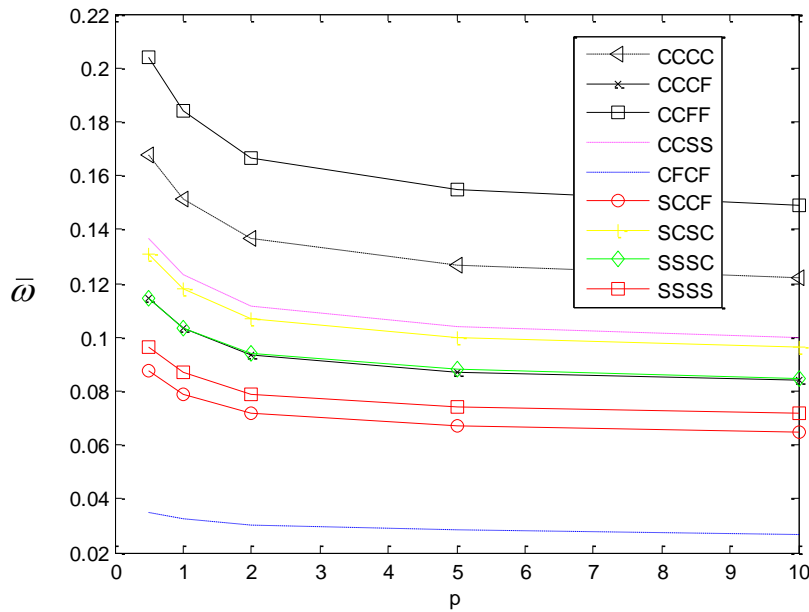
Bên cạnh đó, luận án vận dụng các hàm dạng áp đặt điều kiện biên trong **Bảng 3.3** (các hàm dạng lượng giác $X_1(x), Y_1(y)$) để phân tích tần số dao động của một số loại kết cấu tấm (**Bảng 3.29, 3.30** và **Hình 3.23**). Các kết quả sử dụng hàm dạng này không chính xác bằng các kết quả hàm dạng hyperbolic như đã trình bày.

Bảng 3.29: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/Al₂O₃, loại A) với các hàm dạng $X_1(x), Y_1(y)$

ĐKB	a/b	h/a	Tham khảo	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=5$
SSSS 1	0.1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		0.1134	0.0868	0.0788	0.0740
			Jin et al (3D) [157]	0.1135	0.0870	0.0789	0.0741
	0.2	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		0.4151	0.3205	0.2892	0.2667
			Jin et al (3D) [157]	0.4169	0.3222	0.2905	0.2676
	0.5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		1.8269	1.4454	1.2893	1.1317
			Jin et al (3D) [157]	1.8470	1.4687	1.3095	1.1450
CSCS 2	0.1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		0.1991	0.1531	0.1386	0.1293
			Jin et al (3D) [157]	0.1604	0.1236	0.1118	0.1038
	0.2	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		0.6865	0.5350	0.4809	0.4353
			Jin et al (3D) [157]	0.5402	0.4236	0.3799	0.3412
	0.5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		2.6559	2.1343	1.8984	1.6279
			Jin et al (3D) [157]	1.9139	1.5724	1.4026	1.2072
CSSS 3	0.1	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		0.1595	0.1224	0.1109	0.1038
			Jin et al (3D) [157]	0.1339	0.1029	0.0932	0.0871
	0.2	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		0.5630	0.4373	0.3936	0.3588
			Jin et al (3D) [157]	0.4731	0.3681	0.3310	0.3014
	0.5	Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)		2.2788	1.8206	1.6200	1.4004
			Jin et al (3D) [157]	1.9139	1.5499	1.3796	1.1961

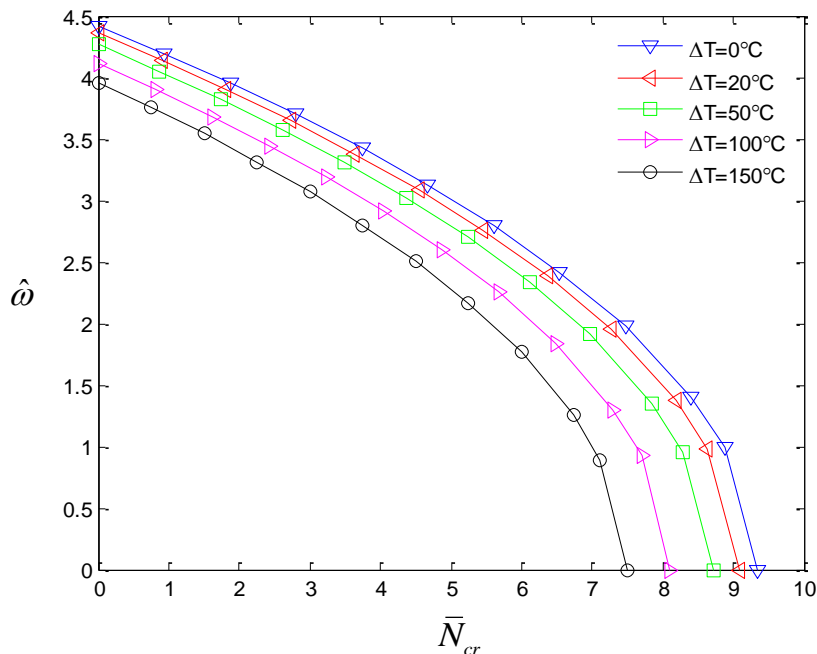
Bảng 3.30: Giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (PGM, Al/ZrO₂, loại A) với các hàm dạng $X_1(x), Y_1(y)$ hình vuông tựa đơn ($a/h = 5$)

Tham khảo	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=10$
Luận án ($\varepsilon_{zz} = 0$)	0.2459	0.2203	0.2169	0.2178	0.2193	0.2206	0.2203
Vel (chính xác) [159]	-	-	0.2192	0.2197	0.2211	0.2225	-
Qian [160]	-	-	0.2152	0.2153	0.2172	0.2194	-
Neves et al ($\varepsilon_{zz} = 0$) [150]	-	-	0.2184	0.2189	0.2202	0.2215	-
Neves et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [150]	-	-	0.2193	0.2198	0.2212	0.2225	-
Neves et al ($\varepsilon_{zz} = 0$) [150]	0.2459	0.2219	0.2184	0.2191	0.2206	0.2220	0.2219
Neves et al ($\varepsilon_{zz} \neq 0$) [150]	0.2469	0.2228	0.2193	0.2200	0.2215	0.2230	0.2229



Hình 3.23: Tần số dao động ($\bar{\omega}$) của tấm (1-1-1) sandwich FGM (PGM, Al/Al₂O₃, loại C, lõi cứng) hình vuông ($\varepsilon_{zz} = 0, a/h = 10$)

Cuối cùng, để thấy được tác động đồng thời của tải trọng cơ học và nhiệt độ, luận án phân tích hiệu ứng của sự thay đổi nhiệt độ qua chiều dày tấm và lực nén màng đến tần số dao động tấm FGM (**Hình 3.24**). Kết quả phân tích cho thấy khi nhiệt độ tăng lên thì lực tới hạn (ổn định) và tần số dao động trong tấm đều giảm.



Hình 3.24: Hiệu ứng của lực màng (\bar{N}_{cr}) đến tần số dao động ($\hat{\omega}$) của tấm FGM (PGM, $p=1$, Al/Al₂O₃, loại A) tựa đơn ($a/h = 10, \varepsilon_{zz} = 0$) trong trường hợp nhiệt độ thay đổi đều.

3.8 Kết luận

Một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới được luận án xây dựng và phát triển để phân tích bài toán tĩnh, bài toán ổn định và bài toán dao động tự do của tấm FGM và tấm sandwich FGM chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ khi dùng lời giải Navier và Ritz. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu của luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải theo lý thuyết HSDT, Quasi-3D và lời giải chính xác 3D của nhiều tác giả ứng với nhiều dạng bài toán khác nhau.
- Một số kết quả của luận án có sự vượt trội nhất định khi đối chứng với các nghiên cứu khác cùng đối tượng nghiên cứu đặc biệt là khi phân tích tần số dao động tự do. Điều này chứng tỏ tính ưu việt của lý thuyết phát triển trong luận án.
- Lý thuyết phát triển trong luận án đã giải quyết được nhiều loại kết cấu tấm với các điều kiện biên phức tạp bằng phương pháp giải tích.
- Luận án cũng đã khảo sát rất chi tiết sự ảnh hưởng của mật độ vật liệu phân bố trong tấm, tỉ lệ hai cạnh, tỉ lệ cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc các phân lớp, các điều kiện biên khác nhau, các nguyên tắc biến đổi nhiệt độ theo chiều dày tấm, các lý thuyết áp dụng... lên các thành phần nội lực, ổn định và dao động trong kết cấu tấm. Điều này giúp cho các nhà nghiên cứu, các nhà thiết kế có được những dự báo cũng như các tiên đoán cần thiết khi nghiên cứu về các đối tượng này.
- Lý thuyết Quasi-3D (kể đến biến dạng theo phương z) rất phù hợp cho việc phân tích các kết cấu tấm chịu tải trọng do nhiệt độ.
- Từ kết quả phân tích ổn định nhiệt cho thấy kết cấu tấm bị mất ổn định sớm nhất khi nhiệt độ thay đổi đều theo chiều dày tấm. Qua đó đánh giá được mức độ an toàn của kết cấu trong môi trường truyền nhiệt.

CHƯƠNG 4

PHÂN TÍCH TẮM FGM BẰNG PHẦN TỬ TAM GIÁC 3 NÚT (MITC3) LÀM TRƠN SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO

4.1. Giới thiệu

Những năm đầu thập niên 80 Bathe và Dvorkin đề xuất phương pháp nội suy hỗn hợp các thành phần tensor “mixed interpolation tensorial components” (MITC) để giải quyết vấn đề khoá cắt ([161], [162], [163]), kỹ thuật này đã thành công cho bài toán vỏ 4 nút và 8 nút (MITC4 và MITC8) ([164], [165]). Sau đó, Bathe và Bucalem đã phát triển nó lên 9 nút và 16 nút (MITC9 và MITC 16) [166].

Bên cạnh những thành công nhất định cho phần tử tứ giác thì việc nghiên cứu và phát triển cho phần tử tam giác theo PP PTHH cũng đã được áp dụng và đạt hiệu quả trong vấn đề rời rạc hoá hình học của một số kết cấu phức tạp.

Do sử dụng hàm dạng C^0 trong xấp xỉ trường chuyển vị, các thành phần biến dạng trong phần tử tam 3 nút là hằng số trên miền phần tử nhưng lại có sự chênh lệch giá trị giữa các phần tử. Để làm giảm mức độ chênh lệch này, tác giả Liu và cộng sự ([167], [168]) đã trung bình miền biến dạng trên các miền được định nghĩa trên phần tử, các phần tử chung cạnh, hoặc các phần tử chung nút và hình thành PP PTHH trơn trên miền (CS), trên cạnh (ES), trên nút (NS) hoặc trên mặt phần tử (FS). Từ đó, các phương pháp làm trơn này kết hợp với các phương pháp khử “khóa cắt” đã được quan tâm rất nhiều bởi các nhà khoa học.

4.2. Trường chuyển vị và biến dạng theo HSDT

Để thuận tiện đánh giá phương pháp số phát triển, trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ([169], [170]):

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z) &= u(x, y) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \theta_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \phi_x(x, y) \\
u_2(x, y, z) &= v(x, y) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \theta_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \phi_y(x, y) \\
u_3(x, y, z) &= w(x, y)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

trong đó $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ là các thành phần chuyển vị và góc xoay tại vị trí mặt trung bình của tấm; ϕ_x, ϕ_y là các hàm độ cong.

Quan hệ giữa trường biến dạng và trường chuyển vị:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases} \tag{4.2}$$

Thay thế trường chuyển vị vào trường biến dạng:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \end{cases} \tag{4.3}$$

Viết lại công thức dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + z^3\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \tag{4.4}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \frac{c}{3} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

với:

$$c = -\frac{4}{h^2} \tag{4.6}$$

Tương tự, thành phần biến dạng cắt:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} - \frac{4z^2}{h^2} \begin{Bmatrix} \phi_x + \theta_x \\ \phi_y + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} + z^2 \boldsymbol{\kappa}^{(s)} \quad (4.8)$$

với:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa}^{(s)} = c \begin{Bmatrix} \phi_x + \theta_x \\ \phi_y + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

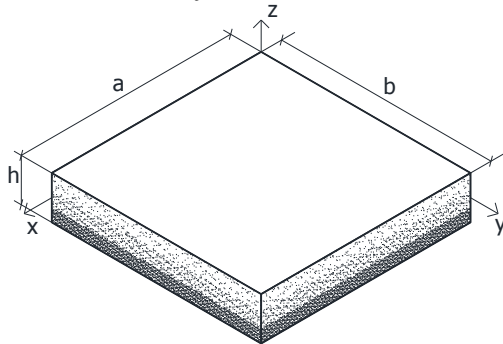
Ngoài ra, nếu sử dụng hàm biến dạng cắt bậc cao $f(z)$ mà luận án đã phát triển ở chương 3 ($r = 1$) thì trường chuyển vị theo (4.1) trở thành:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + f(z)\theta_x(x, y) - \frac{20rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}\phi_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + f(z)\theta_y(x, y) - \frac{20rz^3}{3h^2(r^2 + 4)}\phi_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

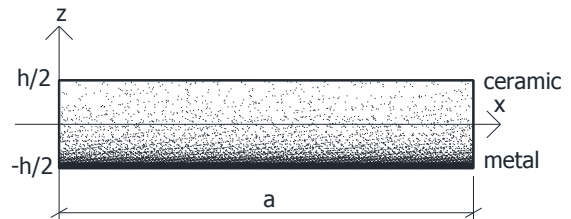
Do tính đơn giản của hàm biến dạng cắt dạng đa thức bậc 3 nên trong chương này luận án chủ yếu tập trung phân tích ứng xử của tấm FGM dựa theo (4.1).

4.3. Phương trình ứng xử của tấm FGM

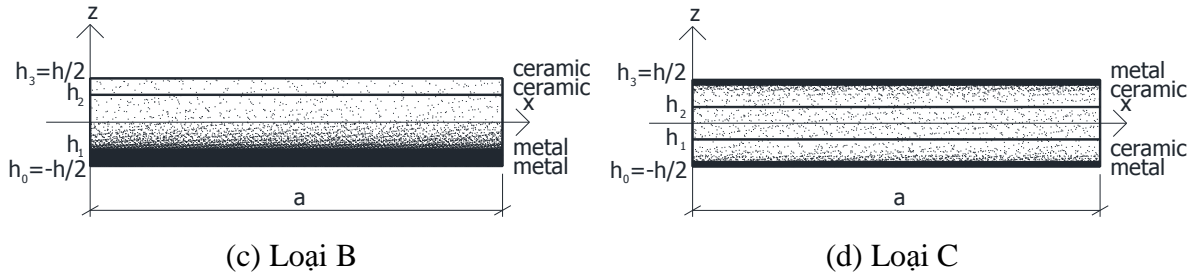
Tấm FGM hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều cao là h như **Hình 4.1** được chế tạo từ gốm (ceramic) và kim loại (metal) có các đặc tính hữu hiệu vật liệu thay đổi liên tục theo chiều dày tấm theo quy luật hàm lũy thừa.



(a) Mô hình tấm



(b) Loại A



Hình 4.1: Mô hình tấm FGM

Đặc trưng hữu hiệu của tấm được xác định theo quy luật hàm lũy thừa [2] (PGM):

$$P^{(j)}(z) = (P_c - P_m)V_c^{(j)}(z) + P_m \quad (4.11)$$

trong đó P_c và P_m là mô đun đàn hồi (E), hệ số Poisson (ν), khối lượng thể tích (ρ) của vật liệu gốm và kim loại. V_c là hàm mật độ thể tích thay đổi theo quy luật lũy thừa hệ số mũ tùy thuộc vào từng loại tấm (**Hình 4.2**):

- Tấm loại A: được chế tạo từ kim loại và gốm với hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) (**Hình 4.1b**):

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \quad (4.12)$$

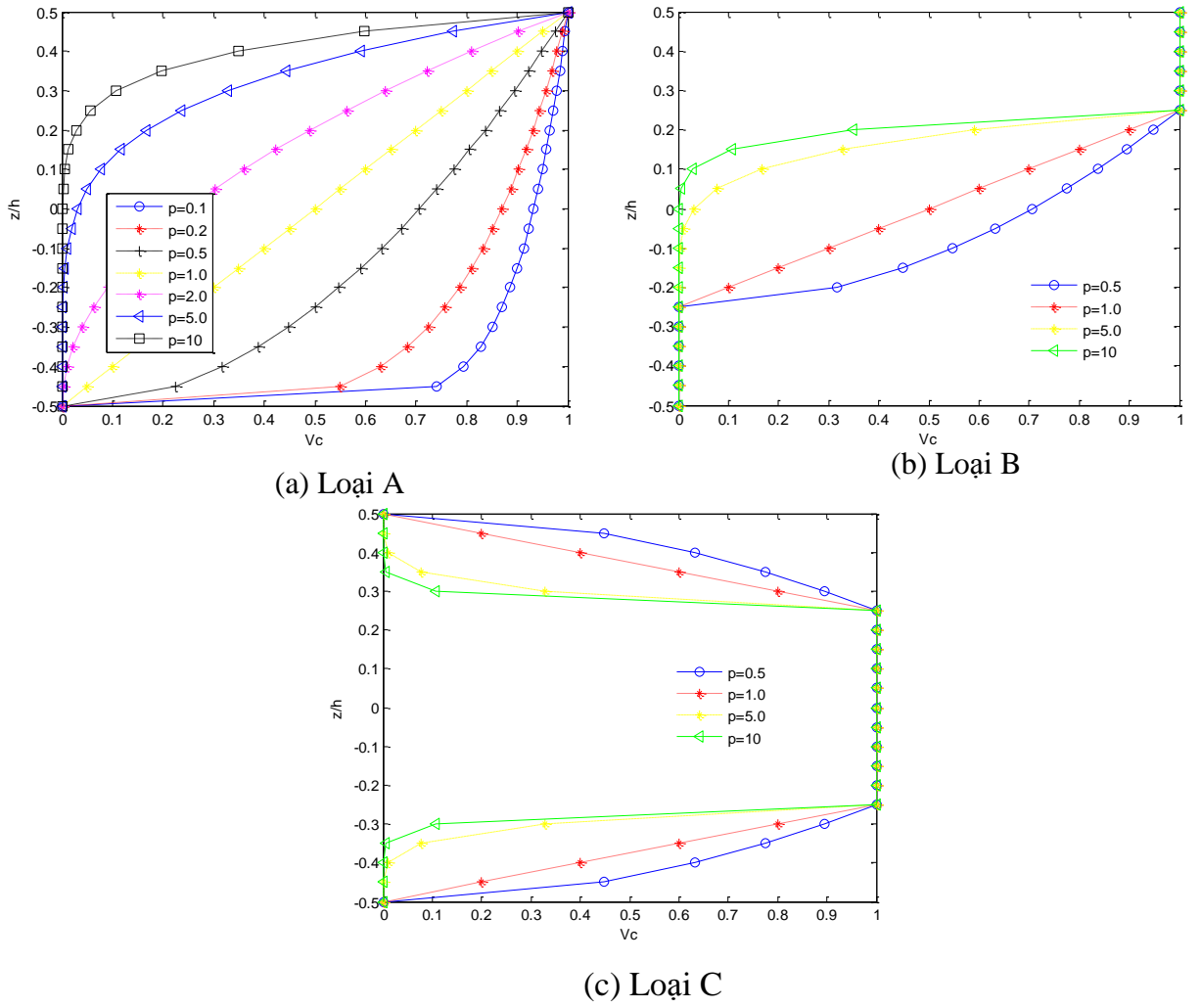
với p là hệ số đặc trưng vật liệu, h là chiều dày tấm.

- Tấm loại B: là tấm composite với lớp trên là gốm, lớp dưới được chế tạo từ kim loại, và lõi giữa được làm từ kim loại và gốm (**Hình 4.1c**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\frac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^p; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = 1; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (4.13)$$

- Tấm loại C: là tấm composite với lớp trên, lớp dưới được chế tạo từ gốm và kim loại, và lõi giữa được làm từ gốm (lõi cứng) hay kim loại (lõi mềm) (**Hình 4.1d**). Hàm mật độ thể tích của vật liệu gốm (V_c) tại mỗi phân lớp:

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^p; & z \in [h_0, h_1] \\ V_c^{(2)}(z) = 1; & z \in [h_1, h_2] \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^p; & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (4.14)$$



Hình 4.2: Giá trị V_c theo chiều dày tấm

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong tấm tại lớp thứ j :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(j)} \\ \sigma_{yy}^{(j)} \\ \sigma_{xy}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(j)} & C_{12}^{(j)} & 0 \\ C_{21}^{(j)} & C_{22}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^{(j)} \\ \sigma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55}^{(j)} & 0 \\ 0 & C_{44}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.15b)$$

trong đó:

$$C_{11}^{(j)}(z) = C_{22}^{(j)}(z) = \frac{E^{(j)}(z)}{1 - \nu^{(j)}(z)}, \quad C_{12}^{(j)}(z) = \nu^{(j)}(z)C_{11}^{(j)}(z) \quad (4.16a)$$

$$C_{44}^{(j)}(z) = C_{55}^{(j)}(z) = C_{66}^{(j)}(z) = \frac{E^{(j)}(z)}{2(1 + \nu^{(j)}(z))} \quad (4.16b)$$

4.4. Phương trình năng lượng

Phương trình cân bằng theo phiếm hàm năng lượng Lagrange:

$$\Pi = U + V - K \quad (4.17)$$

trong đó U, V và K là các thành phần năng lượng biến dạng, thế năng và động năng của tấm. Thành phần phiếm hàm năng lượng biến dạng được xác định:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma}) d\Omega \quad (4.18)$$

$$\text{với } \boldsymbol{\varepsilon}_p^T = [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}], \boldsymbol{\gamma}^T = [\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \quad \boldsymbol{\kappa}^{(s)}]$$

và:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^s & \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

trong đó:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{H}) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \mathbf{C}^{(j)}(z) dz \quad (4.20a)$$

$$(\mathbf{A}^s, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (1, z^2, z^4) \mathbf{C}^{(j)}(z) dz \quad (4.20b)$$

Thành phần phiếm hàm thế năng:

$$V = - \int_{\Omega} q w d\Omega \quad (4.21)$$

Thành phần phiếm hàm động năng:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (4.22)$$

trong đó $\dot{\mathbf{u}}^T = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\theta}_x \quad \dot{\theta}_y \quad \dot{\phi}_x \quad \dot{\phi}_y]$, dấu (\cdot) là đạo hàm theo thời gian t .

và:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & m_{16} & 0 \\ & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} & 0 & m_{27} \\ & & m_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_{44} & 0 & m_{46} & 0 \\ & & & & m_{55} & 0 & m_{57} \\ & & & & & m_{66} & 0 \\ [sym & & & & & & m_{77} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
m_{11} = m_{22} = m_{33} &= I_1, m_{14} = m_{25} = I_2 + \frac{c}{3I_4} \\
m_{16} = m_{27} &= c/3I_4, m_{44} = m_{55} = I_3 + \frac{2c}{3I_5} + \frac{c}{3I_7} \\
m_{46} = m_{57} &= \frac{c}{3I_5} + \frac{c^2}{9I_7}, m_{66} = m_{77} = \frac{c^2}{9I_7}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

với:

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \sum_{j=1}^3 \int_{h_{j-1}}^{h_j} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \rho^{(j)}(z) dz \tag{4.25}$$

Phiếm hàm Lagrange được viết lại:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma}) d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega - \frac{1}{2} \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{m} \mathbf{u} d\Omega \tag{4.26}$$

4.5. Mô hình phần tử hữu hạn cho tấm FGM

Rời rạc miền Ω của phần tử sao cho $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$ and $\Omega_i \cap \Omega_j, i \neq j$, trường chuyển vị của tấm $\mathbf{u}^h = [u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \phi_x \ \phi_y]$ được nội suy theo các chuyển vị nút tương ứng:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_n} \begin{bmatrix} N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{4.27}$$

trong đó N_n là tổng số nút trong miền rời rạc, $N_i(x)$ là hàm dạng tại nút thứ i của phần tử, $\mathbf{d}_i^T = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \phi_{xi} \ \phi_{yi}]$ là vector chuyển vị tại nút thứ i của trường chuyển vị \mathbf{u}^h .

Các thành phần biến dạng được xác định:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} &= \sum_i \mathbf{B}_i^m \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \sum_i \mathbf{B}_i^b \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \sum_i \mathbf{B}_i^b \mathbf{d}_i \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} &= \sum_i \mathbf{B}_{0i}^s \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\kappa}^{(s)} = \sum_i \mathbf{B}_{1i}^s \mathbf{d}_i
\end{aligned} \tag{4.28}$$

trong đó:

$$\mathbf{B}_i^m = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.29a}$$

$$\mathbf{B}_{li}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29b)$$

$$\mathbf{B}_{2i}^b = \frac{c}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.29c)$$

$$\mathbf{B}_{0i}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29d)$$

$$\mathbf{B}_{li}^s = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (4.29e)$$

với $N_{i,x}, N_{i,y}$ là đạo hàm các hàm dạng theo trục x và y .

Viết lại phiếm hàm Lagrange theo PP PTHH:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left[\int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B} + \mathbf{S}^T \mathbf{D}_s^* \mathbf{S}) d\Omega \right] \mathbf{d} - \left(\int_{\Omega} q \mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{d} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \left(\int_{\Omega} \dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{N}} d\Omega \right) \dot{\mathbf{d}} \quad (4.30)$$

với:

$$\mathbf{B}_i = \left[(\mathbf{B}_i^m)^T \quad (\mathbf{B}_{li}^b)^T \quad (\mathbf{B}_{2i}^b)^T \right] \quad (4.31)$$

$$\mathbf{S}_i = \left[(\mathbf{B}_{0i}^s)^T \quad (\mathbf{B}_{li}^s)^T \right] \quad (4.32)$$

Phương trình để giải cho bài toán tấmm FGM:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.33)$$

với q_i là các thành phần chuyển vị, \dot{q}_i là vận tốc chuyển động, viết lại (4.30):

$$\mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{P} \quad (4.34)$$

trong đó:

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} q \mathbf{N} d\Omega \quad (4.35)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{N}} d\Omega \quad (4.36)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B} + \mathbf{S}^T \mathbf{D}_s^* \mathbf{S}) d\Omega \quad (4.37)$$

4.6. Mô hình phần tử MITC và phương pháp làm tron

4.6.1 Mô hình MITC cho phần tử tam giác

Các chuyển vị thành phần của phần tử tam giác:

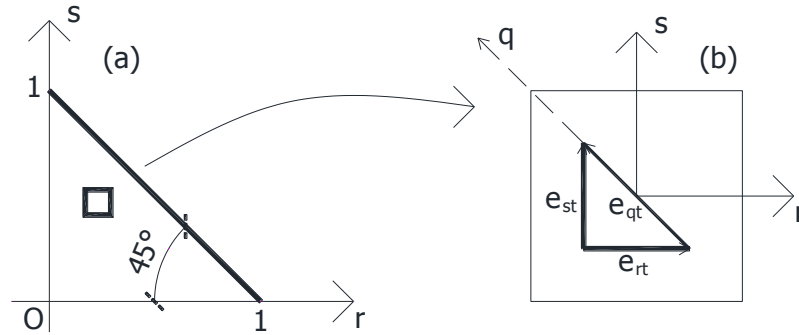
$$\begin{aligned}
u &= \sum_1^3 N_i u_i; v = \sum_1^3 N_i v_i; w = \sum_1^3 N_i w_i \\
\theta_x &= \sum_1^3 N_i \theta_{xi}; \theta_y = \sum_1^3 N_i \theta_{yi} \\
\phi_x &= \sum_1^3 N_i \phi_{xi}; \phi_y = \sum_1^3 N_i \phi_{yi}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

trong đó:

$$N_1 = r; N_2 = s; N_3 = 1 - r - s \tag{4.39}$$

với r, s là hệ tọa độ quy chiếu của phần tử.

Để khắc phục hiện tượng “khóa cắt” (shear locking) thì trường biến dạng cắt (4.29d) phải được xấp xỉ lại thông qua các “điểm buộc” (typing point) [171].



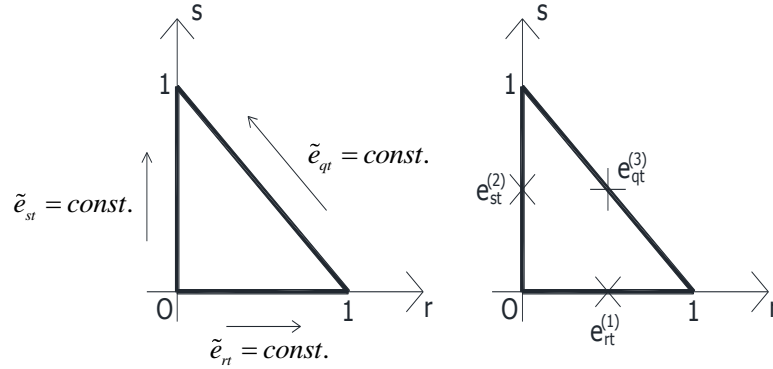
Hình 4.3: Cách xác định biến dạng cắt e_{qt}

Xét phần tử tam giác với hệ trục tọa độ tự nhiên được chọn như **Hình 4.3a**. Ta xây dựng trường biến dạng cắt e_{qt} (cạnh huyền tam giác) theo 2 thành phần e_{rt} và e_{st} (**Hình 4.3b**). Thành phần biến dạng cắt e_{qt} được xác định như sau:

$$e_{qt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st} - e_{rt}) \tag{4.40}$$

Hàm xấp xỉ đa thức được chọn cho các thành phần biến dạng cắt:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{rt} &= a_1 + b_1 r + c_1 s \\
\tilde{e}_{st} &= a_2 + b_2 r + c_2 s \\
\tilde{e}_{qt} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{e}_{st} - \tilde{e}_{rt}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(a_2 + b_2 r + c_2 s) - (a_1 + b_1 r + c_1 s)]
\end{aligned} \tag{4.41}$$



Hình 4.4: Vị trí các điểm buộc “typing point” cho phần tử tam giác 3 nút

Các tham số của phương trình (4.41) được xác định theo các điểm buộc như **Hình 4.4** (với biến dạng cắt là hàng số theo mỗi cạnh tam giác). Áp dụng các điều kiện ràng buộc ta có:

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_{rt}(0,0) &= e_{rt}^{(1)}, \quad \tilde{e}_{rt}(1,0) = e_{rt}^{(1)} \\
 \tilde{e}_{st}(0,0) &= e_{st}^{(2)}, \quad \tilde{e}_{st}(0,1) = e_{st}^{(2)} \\
 \tilde{e}_{qt}(1,0) &= e_{qt}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st}^{(3)} - e_{rt}^{(3)}) \\
 \tilde{e}_{qt}(0,1) &= e_{qt}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{st}^{(3)} - e_{rt}^{(3)})
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Thay (4.42) vào (4.41) thu được:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= e_{rt}^{(1)}, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = e_{st}^{(2)} - e_{rt}^{(1)} - e_{st}^{(3)} + e_{rt}^{(3)} \\
 a_2 &= e_{rt}^{(2)}, \quad b_2 = -c_1, \quad c_2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Trường biến dạng cắt xấp xỉ:

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_{rt} &= e_{rt}^{(1)} + c_3 s \\
 \tilde{e}_{st} &= e_{st}^{(2)} - c_3 r
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

trong đó:

$$c_3 = e_{st}^{(2)} - e_{rt}^{(1)} - e_{st}^{(3)} + e_{rt}^{(3)} \tag{4.45}$$

Quan hệ giữa biến dạng cắt và chuyển vị được viết lại:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n_{ij}} h_{ij}^k(r,s) \mathbf{B}_{ij}^s \Big|_{(r_{ij}^k, s_{ij}^k, t)} \right] \mathbf{d} = \tilde{\mathbf{B}}_{0i-MITC}^s \mathbf{d} \tag{4.46}$$

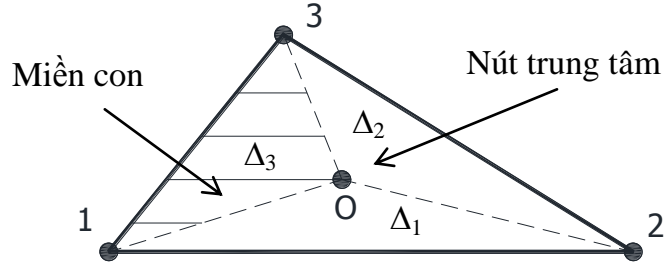
Thành phần liên quan ma trận độ cứng cắt:

$$\mathbf{S}_i = \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_{0i-MITC}^s \right)^T \quad \left(\mathbf{B}_{1i}^s \right)^T \right] \tag{4.47}$$

4.6.2 Phương pháp làm trơn cho phần tử MITC3

4.6.2.1 Mô hình làm trơn trên miền (CS)

Các bậc tự do theo phương pháp CS-FEM ([172], [173], [174], [175], [176], [177]) thì mỗi phần tử tam giác Ω_e được chia thành 3 tam giác con Δ_1 , Δ_2 và Δ_3 được kết nối với một điểm trung tâm O của tam giác lớn (**Hình 4.5**).



Hình 4.5: Các tam giác con trong phần tử CS-MITC3

Vector chuyển vị của nút trung tâm \mathbf{d}_o^e được xác định thông qua vector chuyển vị của 3 nút của tam giác lớn:

$$\mathbf{d}_o^e = \frac{1}{3}(\mathbf{d}_1^e + \mathbf{d}_2^e + \mathbf{d}_3^e) \quad (4.48)$$

Thành phần tam giác con Δ_1 (tam giác O-1-2) của phần tử với xấp xỉ tuyến tính trường chuyển vị $\mathbf{u}^{e\Delta_1} = [u^{e\Delta_1} \ v^{e\Delta_1} \ w^{e\Delta_1} \ \theta_x^{e\Delta_1} \ \theta_y^{e\Delta_1} \ \phi_x^{e\Delta_1} \ \phi_y^{e\Delta_1}]^T$ được xác định:

$$\mathbf{u}^{e\Delta_1} = N_1^{e\Delta_1} \mathbf{d}_o^e + N_2^{e\Delta_1} \mathbf{d}_1^e + N_3^{e\Delta_1} \mathbf{d}_2^e = \mathbf{N}^{e\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (4.49)$$

trong đó $\mathbf{d}^{e\Delta_1} = [\mathbf{d}_o^e \ \mathbf{d}_1^e \ \mathbf{d}_2^e]$ là vector bậc tự do các nút và $\mathbf{N}^{e\Delta_1} = [N_1^{e\Delta_1} \ N_2^{e\Delta_1} \ N_3^{e\Delta_1}]$ là các hàm dạng của tam giác con Δ_1 .

Lúc này, các thành phần biến dạng màng tuyến tính $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{L\Delta_1}$, biến dạng uốn $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_1}$ và biến dạng cắt $\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_1}$ trong miền tam giác con Δ_1 được tính toán lại như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(0)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{m\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{m\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{m\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{m\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (4.50)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{b_1\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{b_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{b_1\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{b_2\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{b_2\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{b_2\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \mathbf{b}_{2-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \mathbf{b}_{3-MITC3}^{s_0\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_O^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}_{j-MITC3}^{s_0\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (4.52)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{s_1\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{s_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_O^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{s_1\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1}$$

với $\mathbf{b}^{m\Delta_1}$, $\mathbf{b}^{mNL\Delta_1}$, $\mathbf{b}^{b_1\Delta_1}$, $\mathbf{b}^{b_2\Delta_1}$, $\mathbf{b}_{j-MITC3}^{s_0\Delta_1}$ và $\mathbf{b}^{s_1\Delta_1}$ được xác định giống \mathbf{B}^{mL} , \mathbf{B}^{mNL} , \mathbf{B}_1^b , \mathbf{B}_2^b , $\tilde{\mathbf{B}}_{0i-MITC}^s$ và \mathbf{B}_1^s nhưng hệ tọa độ của 3 nút $\mathbf{x}_i = [x_i \ y_i]^T$, $i = 1, 2, 3$ được thay thế bởi x_0 , x_1 và x_3 .

Thay (4.49) vào (4.50)-(4.52) và sắp xếp lại, thu được:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(0)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{m\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{m\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{m\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{m\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{m\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{m\Delta_1} \mathbf{d}^e \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{b_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{b_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{b_1\Delta_1} \mathbf{d}^e \quad (4.54)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{b_2\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{b_2\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{b_2\Delta_1} \mathbf{d}^e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} + \mathbf{b}_{2-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} + \mathbf{b}_{3-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} \quad (4.55a)$$

$$= \mathbf{B}_{j-MITC3}^{s_0\Delta_1} \mathbf{d}^e$$

$$\boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{s_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{s_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{s_1\Delta_1} \mathbf{d}^e \quad (4.55b)$$

Các thành phần biến dạng của 2 tam giác con còn lại Δ_2 , Δ_3 được suy ra tương tự như Δ_1 .

Lúc này, sử dụng các miền tron trên cạnh phần tử kết hợp với thao tác làm tron trên miền con Ω_e các biến dạng tron $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ có thể xác định từ các biến dạng tương ứng $\boldsymbol{\varepsilon}^h$:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^{(0)e} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(0)h} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(0)\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega \quad (4.56)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)e} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)h} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega \quad (4.57)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)e} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)h} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}_s^h \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega \quad (4.58)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_s^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\kappa}_s^h \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega$$

với $\phi_e(x)$ là một hàm có chức năng làm trơn và thỏa mãn các điều kiện sau [178]:

$$\begin{cases} \phi(x) \geq 0 \\ \int_{\Omega_e} \phi(x) d\Omega = 1 \end{cases} \quad (4.59)$$

Để đơn giản hàm $\phi_e(x)$ được chọn là hàm hằng số theo từng mảng:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{A_e} & x \in \Omega_e \\ 0 & x \notin \Omega_e \end{cases} \quad (4.60)$$

trong đó A_e là diện tích phần tử tam giác, các thành phần biến dạng trơn (4.56)-(4.58) trở thành:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^{(0)e} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(0)\Delta_j} \quad (4.61)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)e} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_j}; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)e} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_j} \quad (4.62)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^e = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_j} d\Omega; \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_s^e = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_j} d\Omega \quad (4.63)$$

với A_{Δ_j} , $j=1,2,3$ là phần diện tích tam giác con Δ_j .

Thay thế các thành phần biến dạng từ (4.53)-(4.55) vào (4.61)-(4.63):

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^{(0)e} &= \tilde{\mathbf{B}}^m \mathbf{d}^e; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)e} = \tilde{\mathbf{B}}^{b_1} \mathbf{d}^e; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)e} = \tilde{\mathbf{B}}^{b_2} \mathbf{d}^e \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^e &= \tilde{\mathbf{B}}_{i-MITC3}^{s_0} \mathbf{d}^e; \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_s^e = \tilde{\mathbf{B}}^{s_1} \mathbf{d}^e \end{aligned} \quad (4.64)$$

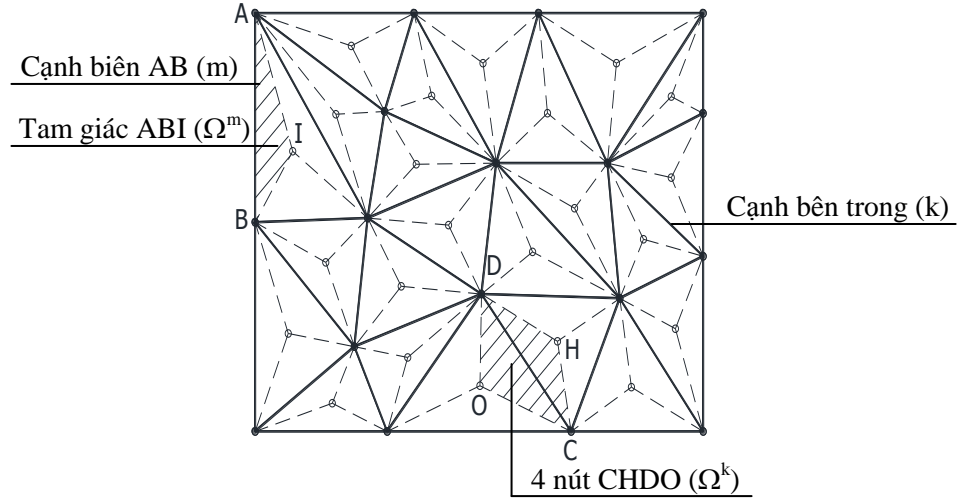
trong đó $\tilde{\mathbf{B}}^m$, $\tilde{\mathbf{B}}^{b_1}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{b_2}$, $\tilde{\mathbf{B}}_{i-MITC3}^{s_0}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{s_1}$ được gọi là các ma trận biến dạng trơn của phần tử được xác định theo (4.65):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}}^m &= \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{m\Delta_j} \\
\tilde{\mathbf{B}}^{b_1} &= \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{b_1\Delta_j}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{b_2} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{b_2\Delta_j} \\
\tilde{\mathbf{B}}^{s_0} &= \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \mathbf{B}^{s_0\Delta_j} d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{s_1} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \mathbf{B}^{s_1\Delta_j} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Thành phần liên quan ma trận độ cứng cắt theo CS-MITC3:

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_{0i-CS-MITC3}^s \right)^T \quad \left(\tilde{\mathbf{B}}_{1i}^s \right)^T \right] \tag{4.66}$$

4.6.2.2 Mô hình làm trơn trên cạnh (ES)



Hình 4.6: Miền làm trơn (Ω^k) theo phương pháp ES-MITC3

Theo phương pháp này thì miền làm trơn dựa trên cạnh phần tử ([153], [179], [180], [181], [182], [183], [184], [185], [186], [187]), sao cho:

$$\Omega \approx \bigcup_{k=1}^{N_{ed}} \Omega^k \quad \text{và} \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \Phi \quad \text{với} \quad i \neq j \tag{4.67}$$

với N_{ed} là tổng số cạnh của tất cả các phần tử trên miền khảo sát.

Đối với phần tử tam giác 3 nút miền trơn Ω^k liên quan đến cạnh thứ k được tạo ra bằng cách kết nối hai nút cuối của cạnh với trọng tâm của phần tử liền kề (**Hình 4.6**).

Từ việc sử dụng các miền trơn dựa trên cạnh phần tử, các biến dạng trơn $\bar{\varepsilon}_k$ có thể xác định được từ sự tính toán các biến dạng tương ứng ε_h kết hợp với một thao tác làm trơn trên miền Ω^k liên quan đến cạnh thứ k :

$$\bar{\varepsilon}_k = \int_{\Omega^{(k)}} \varepsilon^h(x) \Phi(x) d\Omega \tag{4.68}$$

trong đó $\Phi(x)$ là một hàm có chức năng làm trơn và thỏa mãn các điều kiện [188]:

$$\Phi(x) \geq 0 \text{ và } \int_{\Omega^k} \Phi(x) d\Omega = 1 \quad (4.69)$$

Để đơn giản $\Phi(x)$ được chọn là một hàm hằng số theo từng mảng:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{A^{(k)}} & x \in \Omega^{(k)} \\ 0 & x \notin \Omega^{(k)} \end{cases} \quad (4.70)$$

$$\text{với } A^{(k)} = \int_{\Omega^k} d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \text{ là diện tích của miền trơn } \Omega^k \quad (4.71)$$

trong đó $N_e^k = 1$ đối với các cạnh biên, $N_e^k = 2$ đối với các cạnh bên trong, A_i là diện tích của phần tử thứ i xung quanh cạnh k .

Từ (4.31) và (4.32), biến dạng của phần tử trở thành:

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega^{(k)}} \varepsilon^h d\Omega \quad (4.72)$$

Ma trận chuyển vị và biến dạng trơn được xác định bởi:

$$\bar{\mathbf{B}}_I(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega^{(k)}} \mathbf{B}_I(x) d\Omega \quad (4.73)$$

Đối với phần tử tam giác 3 nút MITC3, hàm dạng là tuyến tính. Do đó ma trận biến dạng chuyển vị là hằng số trên phần tử. Kết hợp các phương trình từ (4.29a)-(4.29e) và (4.73):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_I^m(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^m; \bar{\mathbf{B}}_I^{b1}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^{b1} \\ \bar{\mathbf{B}}_I^{b2}(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^{b2}; \bar{\mathbf{B}}_I^{s0}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \tilde{\mathbf{B}}_{j-MITC3}^{s0} \\ \bar{\mathbf{B}}_I^{s1}(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} \int_{A_i} \mathbf{B}_I^{s1}(x) d\Omega = \frac{c}{3A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}^* \end{aligned} \quad (4.74)$$

trong đó c là hằng số được xác định từ (4.6) và $\mathbf{B}_j^m, \mathbf{B}_j^{b1}, \mathbf{B}_j^{b2}, \mathbf{B}_{j-MITC3}^{s0}$ là các ma trận biến dạng của phần tử thứ j xung quanh cạnh k . $\mathbf{B}_j^m, \mathbf{B}_j^{b1}, \mathbf{B}_j^{b2}$ được xác định từ (4.29a), (4.29b), (4.29c), $\mathbf{B}_{j-MITC3}^{s0}$ được xác định từ (4.47) và:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

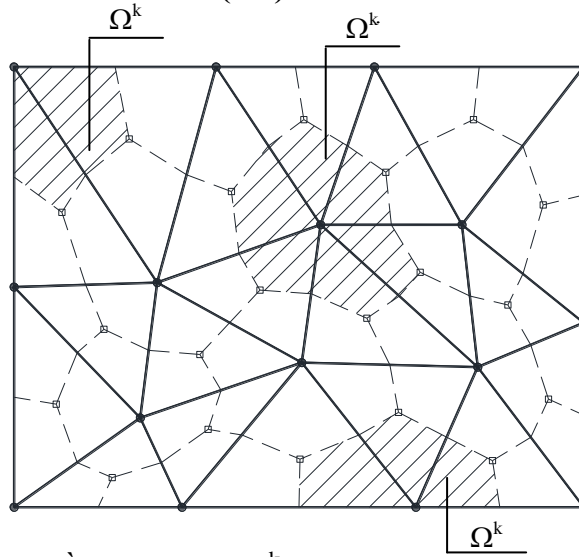
Ma trận độ cứng phần tử theo ES-MITC3:

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \sum_{k=1}^{N_{ed}} \tilde{\mathbf{K}}^k \quad (4.76)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}^k = & \left[(\tilde{\mathbf{B}}_I^m)^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + (\tilde{\mathbf{B}}_I^m)^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^m)^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\
& + \left[(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1})^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1})^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1})^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\
& + \left[(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2})^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2})^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2})^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\
& + \left[(\tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0})^T \mathbf{A}^s \tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0} + (\tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0})^T \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right. \\
& \left. + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{s1})^T \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{s1})^T \mathbf{D}^s \tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right] A^k
\end{aligned} \tag{4.77}$$

4.6.2.3 Mô hình làm tròn trên nút (NS)



Hình 4.7: Miền làm tròn (Ω^k) theo phương pháp NS-MITC3

Tương tự phương pháp ES-MITC3, miền làm tròn của phương pháp này dựa trên nút phần tử ([189], [190], [191], [192], [193]) (**Hình 4.7**), sao cho:

$$\Omega = \sum_{k=1}^{N_n} \Omega^k \quad \text{và} \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \Phi \quad \text{với} \quad i \neq j \tag{4.78}$$

với N_n là tổng số nút của tất cả các phần tử trên miền khảo sát.

Từ việc sử dụng các miền tròn dựa trên nút phần tử, các biến dạng tròn $\bar{\varepsilon}_k$ có thể xác định được từ sự tính toán các biến dạng tương ứng ε_h kết hợp với một thao tác làm tròn trên miền Ω^k liên quan đến nút thứ k :

$$\bar{\varepsilon}_k = \int_{\Omega^{(k)}} \varepsilon^h(x) \Phi(x) d\Omega \tag{4.79}$$

trong đó $\Phi(x)$ là một hàm có chức năng làm tròn và thỏa mãn các điều kiện [194]:

$$\Phi(x) \geq 0 \quad \text{và} \quad \int_{\Omega^k} \Phi(x) d\Omega = 1 \tag{4.80}$$

Để đơn giản hàm $\Phi(x)$ được chọn là một hàm hằng số theo từng mảng:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{A^{(k)}} & x \in \Omega^{(k)} \\ 0 & x \notin \Omega^{(k)} \end{cases} \quad (4.81)$$

$$\text{với } A^{(k)} = \int_{\Omega^k} d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \text{ là diện tích của miền tròn } \Omega^k \quad (4.82)$$

và N_e^k là số phần tử liên quan tới nút k , A_i là diện tích của phần tử thứ i xung quanh nút k .

Từ (4.31) và (4.32), biến dạng của phần tử trở thành:

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega^{(k)}} \varepsilon^h d\Omega \quad (4.83)$$

Ma trận chuyển vị và biến dạng tròn được xác định bởi:

$$\bar{\mathbf{B}}_I(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega^{(k)}} \mathbf{B}_I(x) d\Omega \quad (4.84)$$

Đối với phần tử tam giác 3 nút MITC3, hàm dạng là tuyến tính, do đó ma trận biến dạng chuyển vị là hằng số trên phần tử. Kết hợp các phương trình từ (4.29a)-(4.29e) và (4.84) ta có:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_I^m(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^m; \bar{\mathbf{B}}_I^{b1}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^{b1} \\ \bar{\mathbf{B}}_I^{b2}(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^{b2}; \bar{\mathbf{B}}_I^{s0}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \tilde{\mathbf{B}}_{j-MITC3}^{s0} \\ \bar{\mathbf{B}}_I^{s1}(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} \int_{A_i} \mathbf{B}_I^{s1}(x) d\Omega = \frac{c}{3A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}^* \end{aligned} \quad (4.85)$$

trong đó c là hằng số được xác định từ (4.6) và $\mathbf{B}_j^m, \mathbf{B}_j^{b1}, \mathbf{B}_j^{b2}, \mathbf{B}_{j-MITC3}^{s0}$ là các ma trận biến dạng của phần tử thứ j xung quanh nút k . $\mathbf{B}_j^m, \mathbf{B}_j^{b1}, \mathbf{B}_j^{b2}$ được xác định từ (4.29a), (4.29b), (4.29c), $\mathbf{B}_{j-MITC3}^{s0}$ được xác định từ (4.47) và

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Ma trận độ cứng phần tử theo NS-MITC3:

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \sum_{k=1}^{N_{ed}} \tilde{\mathbf{K}}^k \quad (4.87)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}^k = & \left[(\tilde{\mathbf{B}}_I^m)^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + (\tilde{\mathbf{B}}_I^m)^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^m)^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\
& + \left[(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1})^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1})^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1})^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\
& + \left[(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2})^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2})^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2})^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\
& + \left[(\tilde{\mathbf{B}}_{I-NS-MITC3}^{s0})^T \mathbf{A}^s \tilde{\mathbf{B}}_{I-NS-MITC3}^{s0} + (\tilde{\mathbf{B}}_{I-NS-MITC3}^{s0})^T \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right. \\
& \left. + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{s1})^T \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}_{I-NS-MITC3}^{s0} + (\tilde{\mathbf{B}}_I^{s1})^T \mathbf{D}^s \tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right] A^k
\end{aligned} \tag{4.88}$$

4.7. Kết quả số

Trong chương này, một số ví dụ số áp dụng cho tấm FGM thông thường (loại A), tấm sandwich có lõi là FGM, mặt trên và mặt dưới là vật liệu đồng nhất (loại B), tấm sandwich có lõi là vật liệu đồng nhất, mặt trên và mặt dưới là FGM (loại C) có kích thước hình chữ nhật (**Hình 4.1**). Tính chất vật liệu của các thành phần như trong **Bảng 4.1**.

Bảng 4.1: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

Vật liệu	Môđun đàn hồi (GPa)	Khối lượng riêng (kg/m ³)	Hệ số Poisson
Aluminum (Al*)	70	2702	0.3
Aluminum (Al)	70	2707	0.3
Zirconia (ZrO ₂)	151	3000	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	0.3

Luận án lần lượt khảo sát các bài toán tĩnh và dao động tự do của các loại tấm (loại A, B và C) bằng các phương pháp làm tròn trên miền (CS), trên cạnh (ES) và trên nút (NS) phần tử. Các đại lượng không thứ nguyên sử dụng cho kết quả lời giải:

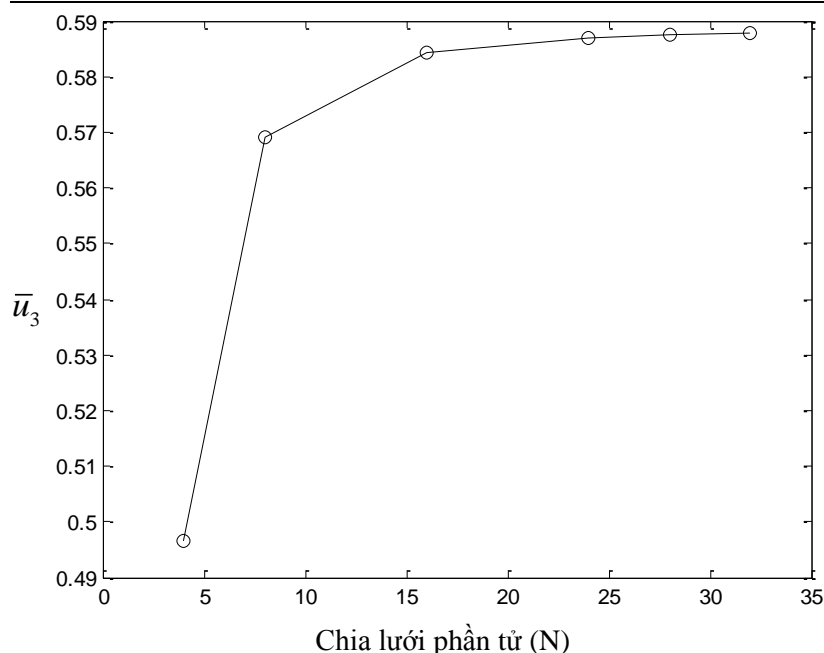
$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(z) &= \frac{100h^3 E_c}{a^4 q_0} u_1\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{u}_3 = \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} u_3\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \\
\hat{u}_3 &= \frac{10h E_0}{a^2 q_0} u_3\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad E_0 = 1 \text{ GPa} \\
\bar{\sigma}_{xx}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \hat{\sigma}_{xx}(z) = \frac{10h^2}{a^2 q_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \\
\bar{\sigma}_{xy}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xy}(0, 0, z), \quad \bar{\sigma}_{xz}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \\
\bar{\omega} &= \frac{\omega a b}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_c^2) \rho_c}{E_c}}, \quad \hat{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Để khảo sát khả năng hội tụ của phần tử ES-MITC3, luận án xét trường hợp tấm FGM (loại A) có $a/h = 10$, tựa đơn với số phần tử trên mỗi cạnh của tấm thay đổi $N \times N = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 24 \times 24, 28 \times 28, 32 \times 32$ với độ lệch tương đối:

$|\Delta\phi| < 10^{-3}$ (ϕ là đối tượng phân tích). Kết quả độ võng, ứng suất và tần số được thể hiện ở **Bảng 4.2**. **Hình 4.8** thể hiện mức độ hội tụ của lời giải.

Bảng 4.2: Khảo sát sự hội tụ của tấm FGM thông thường (Al/Al₂O₃, loại A, ES) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

	Chia lưới					
	4×4	8×8	16×16	24×24	28×28	32×32
\bar{u}_3	0.4967	0.5690	0.5842	0.5868	0.5874	0.5878
\hat{u}_3	0.1307	0.1497	0.1537	0.1544	0.1545	0.1546
$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	1.1368	1.4015	1.4675	1.4799	1.4825	1.4832
$\hat{\omega}$	1.6305	1.4454	1.4083	1.4018	1.4004	1.3995



Hình 4.8: Độ võng tại tâm tấm (\bar{u}_3) của tấm FGM thông thường (Al/Al₂O₃, loại A, ES, $p = 1$) hình vuông tựa đơn chịu tải hình sin ($a/h = 10$)

Bảng 4.3: Giá trị chuyển vị ($100w(a/2, b/2)D/q_0a^4$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$) tấm đồng nhất hình vuông chịu tải phân bố đều

ĐKB	Tham khảo	a/h			
		10	100	1000	10000
SSSS	Luận án (ES)	0.4272	0.4064	0.4062	0.4062
	Nguyen et al (MITC4) [195]	0.4273	0.4064	0.4062	0.4062
	Nguyen et al (MISC1) [195]	0.4273	0.4065	0.4063	0.4063
	Chính xác [196]	0.4273	0.4064	0.4062	0.4062
CCCC	Luận án (ES)	0.1505	0.1268	0.1265	0.1265
	Nguyen et al (MITC4) [195]	0.1504	0.1268	0.1265	0.1265
	Nguyen et al (MISC1) [195]	0.1505	0.1268	0.1265	0.1265
	Chính xác [196]	0.1499	0.1267	0.1265	0.1265

Phần tử MITC3 của luận án đã vượt qua khoá cắt khi phân tích thành phần chuyển vị cho bài toán tấm đồng nhất chịu tải phân bố đều (**Bảng 4.3**). Trong **Bảng 4.3** còn

cho thấy các kết quả của luận án có được là khá ấn tượng khi vượt qua hiện tượng “khóa cắt” cho trường hợp tấm rất mỏng: $a/h = 10000$.

Luận án cũng tiến hành so sánh các giá trị: chuyển vị, ứng suất từ kết quả nghiên cứu của tác giả với các lời giải đã công bố được thể hiện ở **Bảng 4.4**, trong đó các đại lượng thuộc ES_NPT, CS_NPT và NS_NPT lần lượt là các kết quả tính toán sử dụng phần tử MITC3 làm trơn trên cạnh, trên miền và trên nút với trường chuyển vị theo (4.10). Nhìn chung, các kết quả này có độ chính xác không cao khi áp dụng hàm biến dạng cắt của luận án (NPT) cho phương pháp này.

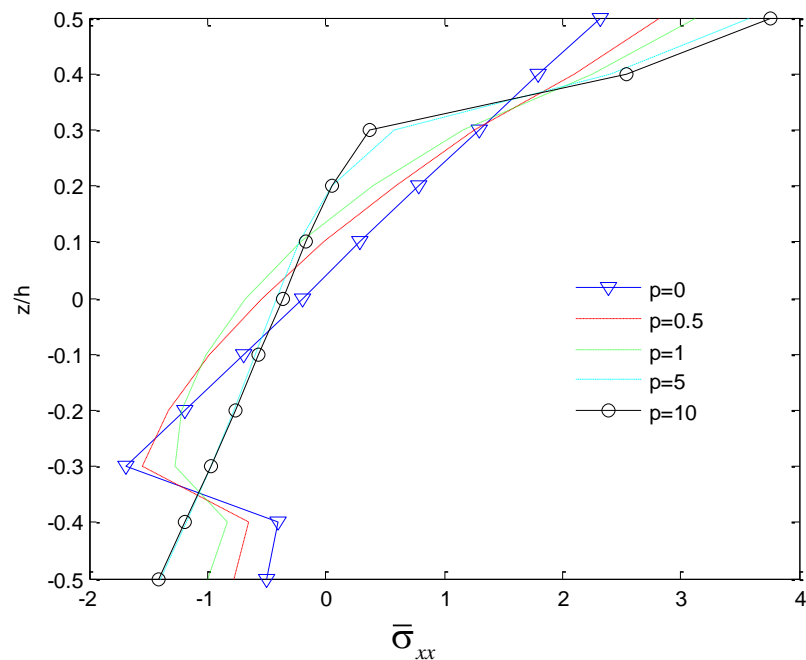
Bảng 4.4: So sánh giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm FGM thông thường (Al/Al_2O_3 , loại A) hình vuông tựa đơn chịu tải hình sin ($a/h = 10$)

p	Tham khảo	$\bar{u}_1(-h/4)$	\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$
1	Luận án (ES)	0.6402	0.5874	1.4825	0.6080	0.2597
	Luận án (ES_NPT)	0.6141	0.5595	1.2055	0.6854	0.2767
	Luận án (CS)	0.6404	0.5866	1.4794	0.6074	0.2616
	Luận án (CS_NPT)	0.6495	0.5744	1.3002	0.6582	0.2732
	Luận án (NS)	0.6399	0.5899	1.4907	0.6077	0.2611
	Luận án (NS_NPT)	0.6755	0.6138	1.4051	0.6283	0.2582
	Quasi-3D [143]	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D [197]	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
2	SSDT [145]	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT [67]	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	Luận án (ES)	0.8970	0.7553	1.3890	0.5414	0.2755
	Luận án (CS)	0.8973	0.7542	1.3859	0.5407	0.2770
	Luận án (NS)	0.8962	0.7585	1.3964	0.5412	0.2770
	Quasi-3D [143]	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D [197]	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT [145]	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
4	HSDT [67]	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	Luận án (ES)	1.0488	0.8795	1.1718	0.5639	0.2611
	Luận án (CS)	1.0493	0.8781	1.1695	0.5629	0.2615
	Luận án (NS)	1.0475	0.8832	1.1783	0.5639	0.2624
	Quasi-3D [143]	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D [197]	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT [145]	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2380
	HSDT [67]	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
8	Luận án (ES)	1.0754	0.9723	0.9413	0.5826	0.2041
	Luận án (CS)	1.0761	0.9707	0.9395	0.5814	0.2140
	Luận án (NS)	1.0742	0.9764	0.9466	0.5829	0.2151
	Quasi-3D [143]	1.0830	0.9738	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D [197]	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	SSDT [145]	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT [67]	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140

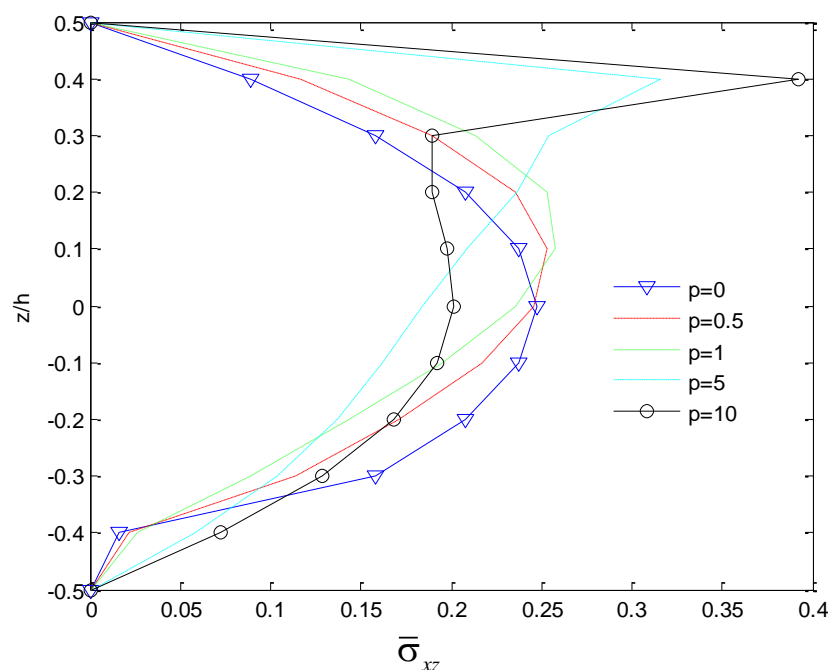
Tương tự, luận án cũng tiến hành so sánh các giá trị: chuyển vị, ứng suất cho tấm loại B được thể hiện ở **Bảng 4.5**. **Hình 4.9** và **4.10** thể hiện giá trị ứng suất màng và ứng suất cắt phân bố theo chiều dày tấm.

Bảng 4.5: So sánh giá trị chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1) hình vuông tựa đơn chịu tải hình sin ($a/h = 10$)

p	Tham khảo	$\bar{u}_1(-h/4)$	\bar{u}_3	$\bar{\sigma}_{xx}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(h/6)$
0	Luận án (ES)	0.3221	0.3726	1.4614	1.0023	0.2202
	Luận án (CS)	0.3220	0.3730	1.4652	1.0071	0.2227
	Luận án (NS)	0.3211	0.3751	1.4764	1.0071	0.2221
	Quasi-3D [148]	-	0.3711	-	-	0.2227
0.5	Luận án (ES)	0.5514	0.5216	1.5020	0.8487	0.2451
	Luận án (CS)	0.5513	0.5222	1.5059	0.8527	0.2474
	Luận án (NS)	0.5507	0.5251	1.5174	0.8527	0.2465
	Quasi-3D [148]	-	0.5238	-	-	0.2581
1	Luận án (ES)	0.7312	0.6319	1.4493	0.6867	0.2587
	Luận án (CS)	0.7314	0.6310	1.4463	0.6861	0.2609
	Luận án (NS)	0.7306	0.6346	1.4572	0.6863	0.2601
	Quasi-3D [73]	-	0.6324	-	-	0.2594
	Quasi-3D [150]	-	0.6305	-	-	0.2788
	Quasi-3D [148]	-	0.6305	-	-	0.2789
10	Luận án (ES)	1.0771	0.8719	0.5582	0.5662	0.1925
	Luận án (CS)	1.0778	0.8703	0.5572	0.5649	0.1920
	Luận án (NS)	1.0765	0.8755	0.5613	0.5665	0.1934
	Quasi-3D [73]	-	0.8740	-	-	0.1944
	Quasi-3D [150]	-	0.8650	-	-	0.2059
	Quasi-3D [148]	-	0.8645	-	-	0.2034



Hình 4.9: Ứng suất màng ($\bar{\sigma}_{xx}$) của sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1, ES) hình vuông tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ($a/h = 10$)



Hình 4.10: Ứng suất cắt ($\bar{\sigma}_{xz}$) của sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1, ES) hình vuông tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ($a/h = 10$)

Thành phần chuyển vị và ứng suất của tấm sandwich FGM (loại C) cũng được trình bày ở **Bảng 4.6**.

Bảng 4.6: So sánh giá trị chuyển vị (\hat{u}_3) của tấm sandwich FGM (Al/ZrO₂, loại C) hình vuông liên kết ngầm chịu tải phân bố hình sin

h/a	p	Tham khảo	1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0.01	0	Luận án (ES)	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961
		Luận án (CS)	0.0992	0.0992	0.0992	0.0992	0.0992	0.0992
		Luận án (NS)	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010	0.1010
	0.5	Luận án (ES)	0.1356	0.1302	0.1275	0.1259	0.1226	0.1196
		Luận án (CS)	0.1403	0.1348	0.1319	0.1303	0.1269	0.1237
		Luận án (NS)	0.1429	0.1372	0.1343	0.1326	0.1292	0.1260
	1	Luận án (ES)	0.1601	0.1516	0.1468	0.1445	0.1389	0.1339
		Luận án (CS)	0.1659	0.1572	0.1521	0.1497	0.1438	0.1387
		Luận án (NS)	0.1689	0.1600	0.1548	0.1525	0.1465	0.1412
5	Luận án (ES)	0.2025	0.1945	0.1849	0.1844	0.1734	0.1661	
	Luận án (CS)	0.2096	0.2019	0.1918	0.1916	0.1800	0.1724	
	Luận án (NS)	0.2134	0.2056	0.1953	0.1951	0.1833	0.1756	
10	Luận án (ES)	0.2061	0.2005	0.1905	0.1915	0.1797	0.1728	
	Luận án (CS)	0.2131	0.2080	0.1975	0.1989	0.1865	0.1795	
	Luận án (NS)	0.2170	0.2118	0.2011	0.2025	0.1899	0.1828	
0.1	0	Luận án (ES)	0.1156	0.1156	0.1156	0.1156	0.1156	0.1156
		Luận án (CS)	0.1167	0.1167	0.1167	0.1167	0.1167	0.1167
		Luận án (NS)	0.1189	0.1189	0.1189	0.1189	0.1189	0.1189
		HSDT [198]	0.1128	0.1128	0.1128	0.1128	0.1128	0.1128
	0.5	Luận án (ES)	0.1588	0.1525	0.1497	0.1477	0.1442	0.1410
		Luận án (CS)	0.1604	0.1541	0.1512	0.1492	0.1457	0.1423
		Luận án (NS)	0.1633	0.1569	0.1540	0.1519	0.1484	0.1450

	HSDT [198]	0.1557	0.1495	0.1467	0.1448	0.1414	0.1381
1.0	Luận án (ES)	0.1862	0.1760	0.1709	0.1679	0.1619	0.1563
	Luận án (CS)	0.1881	0.1779	0.1727	0.1697	0.1636	0.1579
	Luận án (NS)	0.1915	0.1810	0.1758	0.1727	0.1665	0.1608
5.0	HSDT [198]	0.1824	0.1726	0.1675	0.1648	0.1588	0.1535
	Luận án (ES)	0.2363	0.2238	0.2136	0.2116	0.1996	0.1909
	Luận án (CS)	0.2388	0.2262	0.2159	0.2139	0.2018	0.1930
	Luận án (NS)	0.2430	0.2302	0.2197	0.2176	0.2053	0.1964
10	HSDT [198]	0.2304	0.2187	0.2091	0.2073	0.1957	0.1878
	Luận án (ES)	0.2429	0.2312	0.2204	0.2196	0.2067	0.1983
	Luận án (CS)	0.2453	0.2337	0.2228	0.2220	0.2089	0.2005
	Luận án (NS)	0.2497	0.2378	0.2267	0.2258	0.2126	0.2040
	HSDT [198]	0.2365	0.2255	0.2156	0.2149	0.2024	0.1949

Tiếp tục, các kết quả phân tích tần số dao động riêng cho các loại tấm (loại A, B, C) ứng với điều kiện biên tựa đơn và ngàm lần lượt trình bày trong **Bảng 4.7**, **4.8** và **4.9**. **Hình 4.11** và **4.12** trình bày ảnh hưởng của hệ số đặc trưng vật liệu (p), tỉ số (h/a) và cấu trúc vật liệu đối với giá trị tần số dao động.

Bảng 4.7: So sánh giá trị tần số ($\bar{\omega}$) của tấm FGM thông thường (Al^*/ZrO_2 , loại A) hình vuông tựa đơn

a/h	Tham khảo	$p=0$	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
2	Luận án (ES)	1.2502	1.2210	1.1960	1.1390	1.0821	1.0268	0.9717	0.9466
	Luận án (CS)	1.2517	1.2224	1.1973	1.1403	1.0833	1.0281	0.9732	0.9480
	Luận án (NS)	1.2455	1.2163	1.1914	1.1346	1.0779	1.0229	0.9681	0.9430
	3D [156]	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
5	Luận án (ES)	1.7782	1.7270	1.6893	1.6057	1.5293	1.4677	1.4132	1.3764
	Luận án (CS)	1.7780	1.7268	1.6891	1.6055	1.5291	1.4676	1.4133	1.3764
	Luận án (NS)	1.7706	1.7196	1.6821	1.5988	1.5228	1.4615	1.4072	1.3706
	3D [156]	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
10	Luận án (ES)	1.9426	1.8863	1.8426	1.7488	1.6674	1.6074	1.5578	1.5168
	Luận án (CS)	1.9414	1.8852	1.8414	1.7477	1.6664	1.6064	1.5569	1.5159
	Luận án (NS)	1.9339	1.8779	1.8344	1.7410	1.6600	1.6002	1.5509	1.5100
	3D [156]	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066
20	Luận án (ES)	1.9932	1.9286	1.8822	1.7908	1.7098	1.6507	1.6032	1.5608
	Luận án (CS)	1.9916	1.9270	1.8807	1.7894	1.7084	1.6493	1.6019	1.5596
	Luận án (NS)	1.9842	1.9199	1.8737	1.7827	1.7021	1.6432	1.5960	1.5538
	3D [156]	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
50	Luận án (ES)	2.0028	1.9274	1.8888	1.8001	1.7188	1.6598	1.6129	1.5700
	Luận án (CS)	2.0065	1.9292	1.8906	1.8021	1.7210	1.6622	1.6155	1.5727
	Luận án (NS)	1.9991	1.9221	1.8837	1.7955	1.7146	1.6560	1.6095	1.5669
	3D [156]	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
100	Luận án (ES)	2.0050	1.9272	1.8885	1.7999	1.7188	1.6599	1.6132	1.5704
	Luận án (CS)	2.0087	1.9309	1.8923	1.8038	1.7228	1.6640	1.6174	1.5746
	Luận án (NS)	2.0014	1.9238	1.8853	1.7971	1.7165	1.6579	1.6115	1.5688
	3D [156]	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652

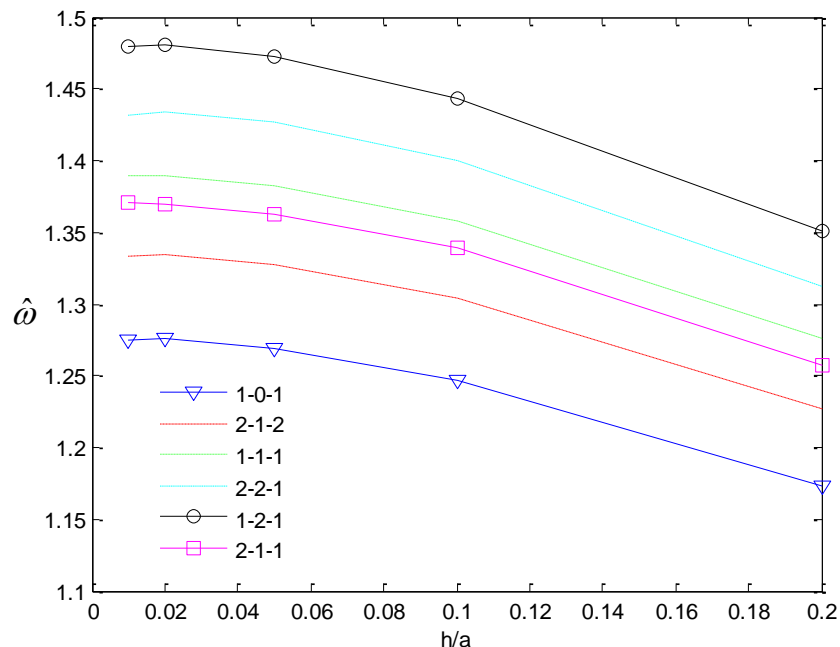
Bảng 4.8: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (Al/Al_2O_3 , loại B) hình vuông tựa đơn

a/h	Tham khảo	1-1-1				1-2-1			2-2-1		
		0	0.5	1	5	0.5	1	5	0.5	1	5
5	Luận án (ES)	1.1072	1.1485	1.1765	1.2125	1.1622	1.1902	1.2686	1.1984	1.2392	1.3283
	Luận án (CS)	1.1100	1.1510	1.1690	1.2150	1.1648	1.1927	1.2682	1.2009	1.2388	1.3301
	Luận án (NS)	1.1051	1.1463	1.1643	1.2102	1.1599	1.1879	1.2632	1.1961	1.2339	1.3248

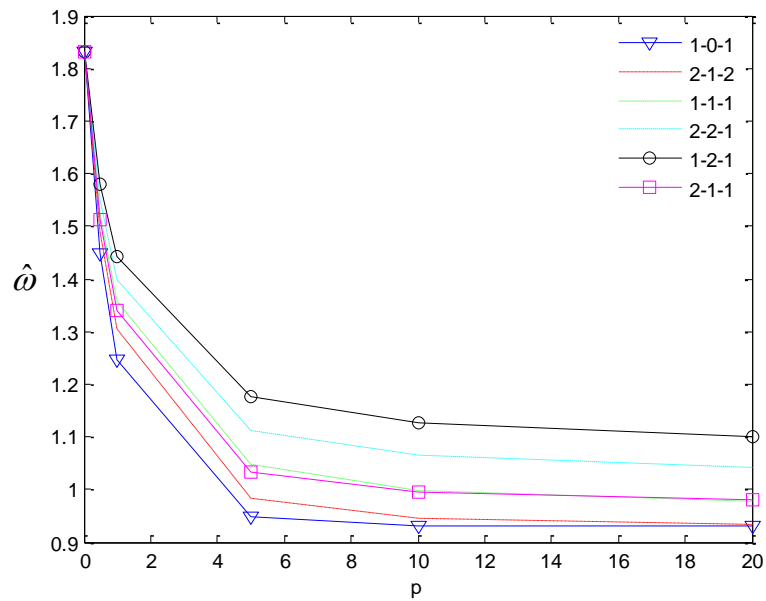
	HSDT9 [136]	1.1021	1.1449	1.1639	1.2113	1.1597	1.1884	1.2644	1.1965	1.2350	1.3249
	HSDT13 [136]	1.0893	1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
10	Luận án (ES)	1.2040	1.2412	1.2573	1.2951	1.2614	1.2851	1.3523	1.2878	1.3246	1.4196
	Luận án (CS)	1.2205	1.2436	1.2564	1.2976	1.2640	1.2842	1.3549	1.2903	1.3272	1.4224
	Luận án (NS)	1.2158	1.2389	1.2517	1.2928	1.2591	1.2793	1.3498	1.2855	1.3222	1.4170
	HSDT9 [136]	1.2138	1.2373	1.2506	1.2921	1.2578	1.2785	1.3492	1.2846	1.3216	1.4161
	HSDT13 [136]	1.2087	1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
100	Luận án (ES)	1.2652	1.2785	1.2890	1.3276	1.3014	1.3185	1.3864	1.3214	1.3597	1.4559
	Luận án (CS)	1.2676	1.2809	1.2915	1.3301	1.3039	1.3210	1.3890	1.3258	1.3622	1.4587
	Luận án (NS)	1.2630	1.2762	1.2867	1.3253	1.2991	1.3161	1.3839	1.3210	1.3572	1.4533
	HSDT9 [136]	1.2617	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	HSDT13 [136]	1.2616	1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519

Bảng 4.9: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại B, 1-8-1, ES) hình vuông

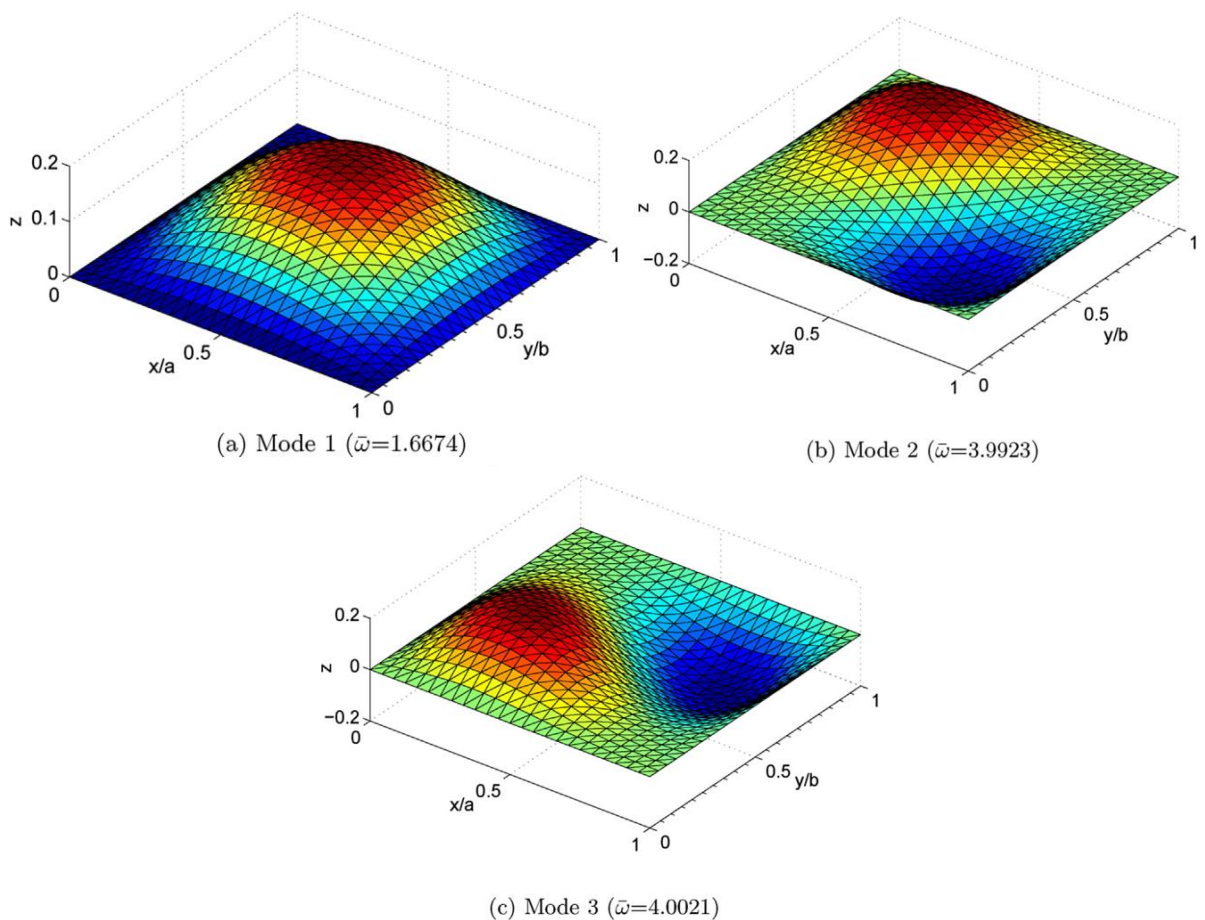
ĐKB	h/a	Tham khảo	$p=0.5$	$p=1.0$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
SSSS	0.01	Luận án (ES)	1.34091	1.38713	1.44558	1.53261	1.59320
		Li et al [138] (3D)	1.33931	1.38669	1.44491	1.53143	1.59105
	0.1	Luận án (ES)	1.30037	1.35075	1.41078	1.49640	1.55372
		Li et al [138] (3D)	1.29751	1.34847	1.40828	1.49309	1.54980
	0.2	Luận án (ES)	1.19521	1.25212	1.31480	1.39697	1.44837
		Li et al [138] (3D)	1.19580	1.25338	1.31569	1.39567	1.44540
CCCC	0.01	Luận án (ES)	2.45628	2.54032	2.64720	2.80567	2.91465
		Li et al [138] (3D)	2.45438	2.54149	2.64835	2.80692	2.91611
	0.1	Luận án (ES)	2.24211	2.34552	2.45892	2.60848	2.70317
		Li et al [138] (3D)	2.24154	2.34606	2.45973	2.60760	2.70070
	0.2	Luận án (ES)	1.85910	1.97572	2.09056	2.22000	2.29087
		Li et al [138] (3D)	1.86081	1.97993	2.09554	2.22142	2.28896



Hình 4.11: Ảnh hưởng của cấu trúc vật liệu và tỉ số (h/a) đối với tần số ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại C, ES) hình vuông tựa đơn ($p = 1$)

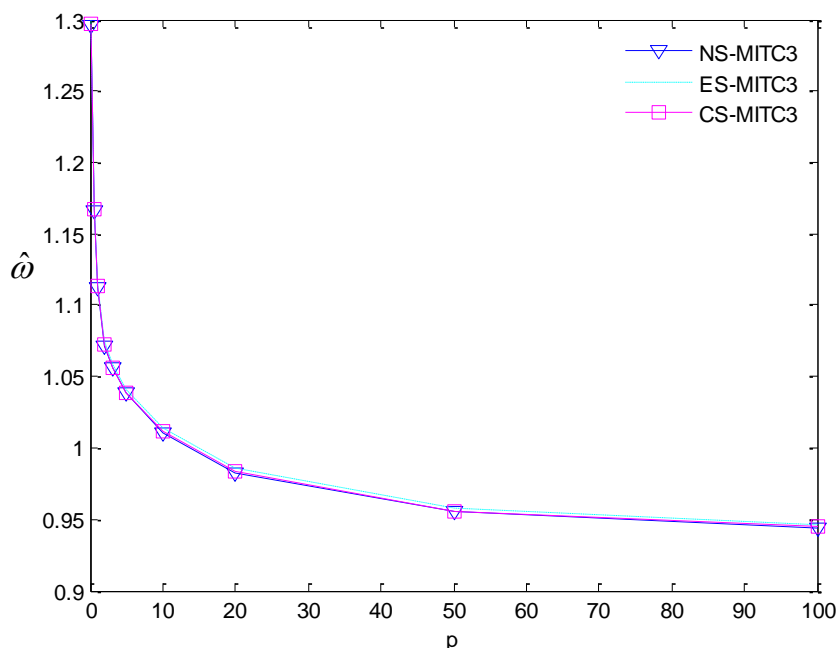


Hình 4.12: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm sandwich FGM (Al/Al₂O₃, loại C, ES) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)



Hình 4.13: Dạng dao động riêng của tấm FGM thông thường (Al/Al₂O₃, loại A) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10, p = 5$)

Bên cạnh đó, các dạng dao động đầu tiên của tấm $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ (loại A) được thể hiện trong **Hình 4.13**. Cuối cùng, để khẳng định lại mức độ chính xác của các phương pháp: NS-MITC3, ES-MITC3 và CS-MITC3 luận án xét lại tấm $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ (loại A) hình vuông có tỉ lệ chiều dài trên chiều dày tấm $a/h=10$, bốn biên tựa đơn. Độ chính xác được so sánh thông qua mối quan hệ giữa giá trị tần số ($\hat{\omega}$) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) được biểu diễn trong **Hình 4.14**.



Hình 4.14: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm FGM thông thường ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$, loại A) hình vuông tựa đơn ($a/h=10$)

4.8. Kết luận

Trong chương này đã phát triển các phần tử CS-MITC3, ES-MITC3 và NS-MITC3 để phân tích bài toán tĩnh và dao động tự do của tấm FGM và tấm sandwich FGM chịu tải trọng cơ học khi dùng PP PTHH. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu của luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải theo lý thuyết HSDT, Quasi-3D và lời giải chính xác 3D của nhiều tác giả ứng với nhiều dạng bài toán khác nhau.
- Đã khử được hiện tượng khoá cứng khi kết quả phân tích là khá phù hợp cho bài toán tấm rất mỏng.
- Sử dụng phần tử bậc C^0 xấp xỉ trường chuyển vị giúp cho việc tính toán được đơn giản hơn.
- Các phần tử phát triển trong luận án có sự tương đồng về kết quả phân tích.
- Luận án cũng đã khảo sát rất chi tiết sự ảnh hưởng của mật độ vật liệu phân bố trong tấm, tỉ lệ hai cạnh, tỉ lệ cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc các phân lớp, các điều kiện biên khác nhau, áp dụng trường chuyển vị theo lý thuyết HSDT của luận án... lên các thành phần nội lực và dao động trong kết cấu

tám. Điều này giúp cho các nhà nghiên cứu, các nhà thiết kế có được những dự báo cũng như các tiên đoán cần thiết khi nghiên cứu về các đối tượng này.

CHƯƠNG 5

MÔ HÌNH TẮM SỬ DỤNG LÝ THUYẾT PHI TUYẾN HÌNH HỌC BẬC CAO

5.1. Giới thiệu

Mô hình tấm sử dụng lý thuyết phi tuyến hình học bậc cao là bài toán tấm sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến các thành phần biến dạng nhỏ chuyển vị lớn (phi tuyến), đây là phần mở rộng của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao nhằm đạt được kết quả chính xác, đúng với mô hình làm việc của kết cấu. Mục tiêu phần này là xây dựng lý thuyết phi tuyến hình học bậc cao để phân tích tấm FGM thông thường và tấm composite nhiều lớp bằng PP PTHH được làm trơn trên miền và trên cạnh phần tử và sử dụng lời giải lặp Newton – Raphson để phân tích bài toán tĩnh. Trong chương này lần lượt trình bày các vấn đề: thiết lập trường chuyển vị và biến dạng, phương trình ứng xử của tấm, phương trình năng lượng theo phiếm hàm Lagrange, mô hình FEM cho bài toán tấm, phương pháp làm trơn, các ví dụ số có so sánh với các nghiên cứu trước đây. Cuối cùng là những kết luận đạt được.

5.2 Trường chuyển vị và biến dạng theo HSDT

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ([169], [170]):

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z) &= u(x, y) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \theta_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \phi_x(x, y) \\u_2(x, y, z) &= v(x, y) + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \theta_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \phi_y(x, y) \\u_3(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\tag{5.1}$$

trong đó $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ là các thành phần chuyển vị và góc xoay tại vị trí mặt trung bình của tấm; ϕ_x, ϕ_y là các hàm độ cong.

Quan hệ giữa trường biến dạng và trường chuyển vị của Von Karman [199]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial y} \end{cases} \quad (5.2)$$

Thay thế trường chuyển vị vào trường biến dạng:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (5.3)$$

Viết lại công thức dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + z^3\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (5.4)$$

trong đó:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^L + \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} \quad (5.5)$$

với $\boldsymbol{\varepsilon}_m^L$, $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}$ và $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ là các thành phần biến dạng màng tuyến tính, biến dạng màng phi tuyến và biến dạng uốn của tấm được xác định:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \frac{c}{3} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{C}\mathbf{Y}$$

trong đó:

$$c = -\frac{4}{h^2} \quad (5.7)$$

Tương tự, thành phần biến dạng cắt:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} + cz^2 \begin{Bmatrix} \phi_x + \theta_x \\ \phi_y + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Hay dưới dạng ma trận:

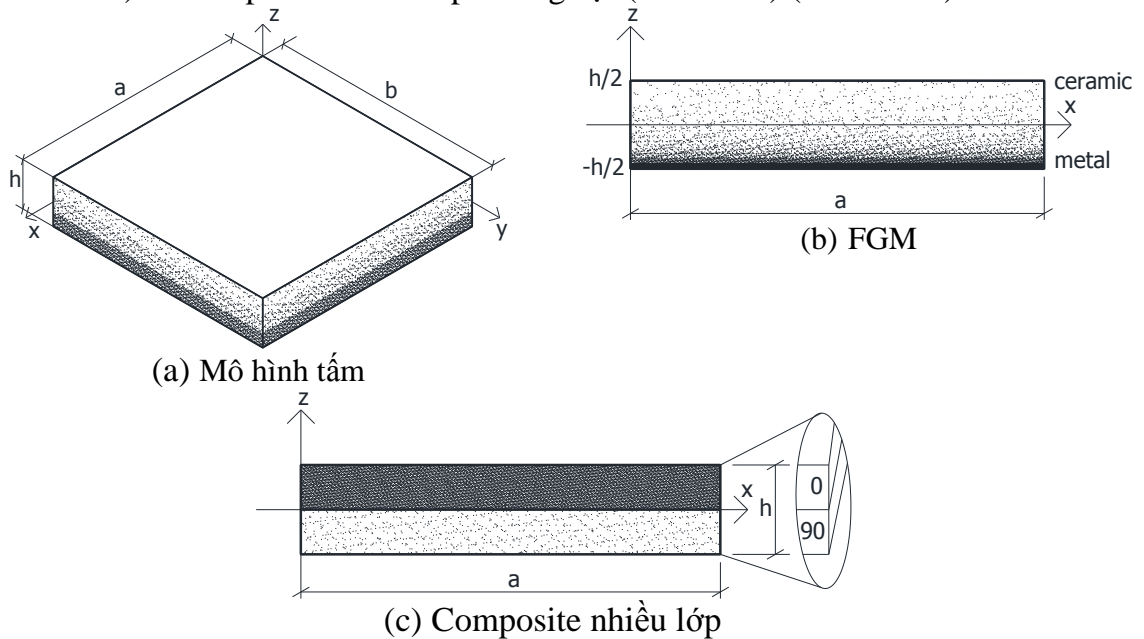
$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} + z^2 \boldsymbol{\kappa}^{(s)} \quad (5.9)$$

với:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa}^{(s)} = c \begin{Bmatrix} \phi_x + \theta_x \\ \phi_y + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

5.3 Phương trình ứng xử của tấm

Tấm hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều cao là h như **Hình 5.1** gồm hai loại tấm: FGM thông thường có hàm mật độ thể tích theo quy luật lũy thừa (**Hình 5.1b**) và composite nhiều lớp hướng sợi (laminates) (**Hình 5.1c**).



Hình 5.1: Mô hình tấm

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tại lớp thứ k của tấm composite nhiều lớp:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.11a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{55} & Q_{54} \\ Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.11b)$$

trong đó:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (5.12a)$$

$$Q_{66} = G_{12}, Q_{55} = G_{13}, Q_{44} = G_{23} \quad (5.12b)$$

với E_1, E_2 là môđun đàn hồi tại mỗi lớp và G_{12}, G_{23}, G_{13} là môđun cắt trong các mặt phẳng xy, yz, xz .

Phương trình ứng xử của tấm composite nhiều lớp trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.13a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{54} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5.13b)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \cos^4 \alpha + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \alpha \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 4Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{12}^{(k)} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \sin^4 \alpha + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22}^{(k)} \cos^4 \alpha \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin \alpha \cos^3 \alpha + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \alpha \cos \alpha \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \alpha \cos \alpha + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 2Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{66}^{(k)} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.4 Phương trình năng lượng

Phương trình cân bằng theo phiếm hàm năng lượng Lagrange:

$$\Pi = U + V \quad (5.15)$$

trong đó U và V là các thành phần năng lượng biến dạng và thế năng của tấm. Thành phần phiếm hàm năng lượng biến dạng được xác định:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma}) d\Omega \quad (5.16)$$

với $\boldsymbol{\varepsilon}_p^T = [\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}]$, $\boldsymbol{\gamma}^T = [\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \quad \boldsymbol{\kappa}^{(s)}]$

và:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^s & \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

trong đó:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{H}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \bar{\mathbf{Q}} dz \quad (5.18a)$$

$$(\mathbf{A}^s, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) \bar{\mathbf{Q}} dz \quad (5.18b)$$

Thành phần phiếm hàm thế năng:

$$V = - \int_{\Omega} q w d\Omega \quad (5.19)$$

Phiếm hàm Lagrange được viết lại:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma}) d\Omega - \int_A q w d\Omega \quad (5.20)$$

5.5 Phân tích phi tuyến tấm theo mô hình phần tử hữu hạn

Rời rạc miền Ω của phần tử sao cho $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$ and $\Omega_i \cap \Omega_j, i \neq j$, trường chuyển vị của tấm $\mathbf{u}^h = [u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \phi_x \quad \phi_y]$ được nội suy theo các chuyển vị nút tương ứng:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_n} \begin{bmatrix} N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (5.21)$$

trong đó N_n là tổng số nút trong miền rời rạc, $N_i(x)$ là hàm dạng tại nút thứ i của phần tử, $\mathbf{d}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi}]$ là vector chuyển vị tại nút thứ i của trường chuyển vị \mathbf{u}^h .

Các thành phần biến dạng được xác định:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_m^L &= \sum_i \mathbf{B}_i^{mL} \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \sum_i \mathbf{B}_{1i}^b \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \sum_i \mathbf{B}_{2i}^b \mathbf{d}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} &= \sum_i \mathbf{B}_{0i}^s \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\kappa}^{(s)} = \sum_i \mathbf{B}_{1i}^s \mathbf{d}_i; \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{B}_i^{mNL} \mathbf{d}_i\end{aligned}\quad (5.22)$$

trong đó:

$$\mathbf{B}_i^{mL} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{B}_{1i}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23b)$$

$$\mathbf{B}_{2i}^b = \frac{c}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (5.23c)$$

$$\mathbf{B}_{0i}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23d)$$

$$\mathbf{B}_{1i}^s = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.23e)$$

$$\mathbf{B}_i^{mNL} = \overline{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{Y}}_i \quad (5.23f)$$

với $N_{i,x}, N_{i,y}$ là đạo hàm các hàm dạng theo trục x và y ; $\overline{\mathbf{C}}$ và $\overline{\mathbf{Y}}$ được xác định như sau:

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\overline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Phương trình để giải cho bài toán tối theo phiếm hàm Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.26)$$

với q_i là các thành phần chuyển vị, \dot{q}_i là vận tốc chuyển động. Phương trình cân bằng:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad (5.27)$$

trong đó:

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} p \mathbf{N} d\Omega \quad (5.28)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_g \quad (5.29)$$

với \mathbf{K}_L là ma trận độ cứng tuyến tính tổng thể, \mathbf{K}_{NL} ma trận độ cứng phi tuyến tổng thể và \mathbf{K}_g ma trận cứng hình học tổng thể. Các ma trận độ cứng tổng thể được lắp ráp từ các ma trận độ cứng phần tử $\mathbf{K}_L^e, \mathbf{K}_{NL}^e, \mathbf{K}_g^e$ và các ma trận phần tử này trong miền con Ω_e được xác định:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_j d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{D}_s^* \mathbf{S}_j d\Omega \quad (5.30)$$

trong đó:

$$\mathbf{B}_i = \left[\left(\mathbf{B}_i^m \right)^T \quad \left(\mathbf{B}_{1i}^b \right)^T \quad \left(\mathbf{B}_{2i}^b \right)^T \right] \quad (5.31)$$

$$\mathbf{S}_i = \left[\left(\mathbf{B}_{0i}^s \right)^T \quad \left(\mathbf{B}_{1i}^s \right)^T \right] \quad (5.32)$$

Ma trận độ cứng phi tuyến phần tử:

$$\mathbf{K}_{NL}^e = \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_{Li}^T \mathbf{D}^{**} \mathbf{B}_{Lj} + \mathbf{B}_{NLi}^T \mathbf{D}^{**} \mathbf{B}_{NLj} + \mathbf{B}_{NLi}^T \mathbf{D}^{**} \mathbf{B}_{NLj} \right) d\Omega \quad (5.33)$$

với:

$$\mathbf{B}_{Li} = \left[\mathbf{B}_i \quad \mathbf{S}_i \right]^T; \mathbf{B}_{NLi} = \left[\mathbf{B}_i^{mNL} \quad \mathbf{0} \right]^T \quad (5.34a)$$

$$\mathbf{D}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_s^* \end{bmatrix} \quad (5.34b)$$

Ma trận độ cứng hình học phần tử:

$$\mathbf{K}_g^e = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{Y}}_i^T \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{Y}}_j d\Omega \quad (5.35)$$

trong đó:

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \bar{N}_x & \bar{N}_{xy} \\ \bar{N}_{xy} & \bar{N}_y \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

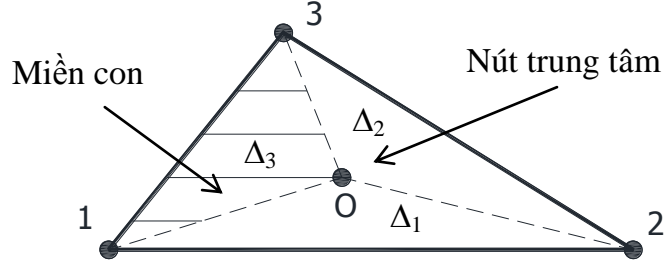
với:

$$\left(\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy} \right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} \right) dz \quad (5.37)$$

5.6 Phương pháp làm trơn phần tử MITC3

5.6.1 Mô hình CS-FEM cho phần tử MITC3

Các bậc tự do Theo phương pháp CS-FEM ([172], [173], [174], [175], [176], [177]) thì mỗi phần tử tam giác Ω_e được chia thành 3 tam giác con Δ_1, Δ_2 và Δ_3 được kết nối với một điểm trung tâm O của tam giác lớn (**Hình 5.2**).



Hình 5.2: Các tam giác con trong phần tử CS-MITC3

Vector chuyển vị của nút trung tâm \mathbf{d}_o^e được xác định thông qua vector chuyển vị của 3 nút của tam giác lớn:

$$\mathbf{d}_o^e = \frac{1}{3}(\mathbf{d}_1^e + \mathbf{d}_2^e + \mathbf{d}_3^e) \quad (5.38)$$

Thành phần tam giác con Δ_1 (tam giác O-1-2) của phần tử với xấp xỉ tuyến tính trường chuyển vị $\mathbf{u}^{e\Delta_1} = [u^{e\Delta_1} \ v^{e\Delta_1} \ w^{e\Delta_1} \ \theta_x^{e\Delta_1} \ \theta_y^{e\Delta_1} \ \phi_x^{e\Delta_1} \ \phi_y^{e\Delta_1}]^T$ được xác định:

$$\mathbf{u}^{e\Delta_1} = N_1^{e\Delta_1} \mathbf{d}_o^e + N_2^{e\Delta_1} \mathbf{d}_1^e + N_3^{e\Delta_1} \mathbf{d}_2^e = \mathbf{N}^{e\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (5.39)$$

trong đó $\mathbf{d}^{e\Delta_1} = [\mathbf{d}_o^e \ \mathbf{d}_1^e \ \mathbf{d}_2^e]$ là vector bậc tự do các nút và $\mathbf{N}^{e\Delta_1} = [N_1^{e\Delta_1} \ N_2^{e\Delta_1} \ N_3^{e\Delta_1}]$ là các hàm dạng của tam giác con Δ_1 .

Lúc này, các thành phần biến dạng màng tuyến tính $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{L\Delta_1}$, biến dạng màng phi tuyến $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL\Delta_1}$, biến dạng uốn $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_1}$ và biến dạng cắt $\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_1}$, $\boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_1}$ trong miền tam giác con Δ_1 được tính toán lại như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{L\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{m\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{m\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{m\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{m\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (5.40)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{mNL\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{mNL\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{mNL\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{mNL\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{b_1\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{b_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{b_1\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (5.41)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{b_2\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{b_2\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_o^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{b_2\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \mathbf{b}_{2-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \mathbf{b}_{3-MITC3}^{s_0\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}_{j-MITC3}^{s_0\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1} \quad (5.42)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} & \mathbf{b}_2^{s_1\Delta_1} & \mathbf{b}_3^{s_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^e \\ \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{b}^{s_1\Delta_1} \mathbf{d}^{e\Delta_1}$$

với $\mathbf{b}^{m\Delta_1}$, $\mathbf{b}^{mNL\Delta_1}$, $\mathbf{b}^{b_1\Delta_1}$, $\mathbf{b}^{b_2\Delta_1}$, $\mathbf{b}_{j-MITC3}^{s_0\Delta_1}$ và $\mathbf{b}^{s_1\Delta_1}$ được xác định giống \mathbf{B}^{mL} , \mathbf{B}^{mNL} , \mathbf{B}_1^b , \mathbf{B}_2^b , $\tilde{\mathbf{B}}_{0i-MITC}^s$ và \mathbf{B}_1^s nhưng hệ tọa độ của 3 nút $\mathbf{x}_i = [x_i \ y_i]^T$, $i = 1, 2, 3$ được thay thế bởi x_0 , x_1 và x_3 .

Thay (5.39) vào (5.40)-(5.42) và sắp xếp lại thu được:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{L\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{m\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{m\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{m\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{m\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{m\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{m\Delta_1} \mathbf{d}^e \quad (5.43)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{mNL\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{mNL\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{mNL\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{mNL\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{mNL\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{mNL\Delta_1} \mathbf{d}^e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{b_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{b_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{b_1\Delta_1} \mathbf{d}^e \quad (5.44)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{b_2\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{b_2\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{b_2\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{b_2\Delta_1} \mathbf{d}^e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} + \mathbf{b}_{2-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} + \mathbf{b}_{3-MITC3}^{s_0\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_{1-MITC3}^{s_0\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} \\ = \mathbf{B}_{j-MITC3}^{s_0\Delta_1} \mathbf{d}^e \quad (5.45)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_s^{\Delta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} + \mathbf{b}_2^{s_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} + \mathbf{b}_3^{s_1\Delta_1} & \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^{s_1\Delta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^e \\ \mathbf{d}_2^e \\ \mathbf{d}_3^e \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{s_1\Delta_1} \mathbf{d}^e$$

Các thành phần biến dạng của 2 tam giác con còn lại Δ_2 , Δ_3 được suy ra tương tự như Δ_1 . Lúc này, sử dụng các miền tron trên cạnh phần tử kết hợp với thao tác làm

trên miền con Ω_e các biến dạng tron $\tilde{\varepsilon}$ có thể xác định từ các biến dạng tương ứng ε^h :

$$\tilde{\varepsilon}_m^{Le} = \int_{\Omega_e} \varepsilon_m^{Lh} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_m^{L\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega \quad (5.46)$$

$$\tilde{\varepsilon}_m^{NLe} = \int_{\Omega_e} \varepsilon_m^{NLh} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_m^{NL\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(1)e} = \int_{\Omega_e} \varepsilon^{(1)h} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^{(1)\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega \quad (5.47)$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(2)e} = \int_{\Omega_e} \varepsilon^{(2)h} \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^{(2)\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega$$

$$\tilde{\varepsilon}_s^e = \int_{\Omega_e} \varepsilon_s^h \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_s^{\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega \quad (5.48)$$

$$\tilde{\kappa}_s^e = \int_{\Omega_e} \kappa_s^h \phi_e(x) d\Omega = \sum_{j=1}^3 \kappa_s^{\Delta_j} \int_{\Delta_j} \phi_e(x) d\Omega$$

với $\phi_e(x)$ là một hàm có chức năng làm tron và thỏa mãn các điều kiện sau [178]:

$$\begin{cases} \phi(x) \geq 0 \\ \int_{\Omega_e} \phi(x) d\Omega = 1 \end{cases} \quad (5.49)$$

Để đơn giản hàm $\phi_e(x)$ được chọn là hàm hằng số theo từng mảng:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1/A_e & x \in \Omega_e \\ 0 & x \notin \Omega_e \end{cases} \quad (5.50)$$

trong đó A_e là diện tích phần tử tam giác, các thành phần biến dạng tron (5.46)-(5.48) trở thành:

$$\tilde{\varepsilon}_m^{Le} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \varepsilon_m^{L\Delta_j} \quad (5.51)$$

$$\tilde{\varepsilon}_m^{NLe} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \varepsilon_m^{NL\Delta_j}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(1)e} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \varepsilon^{(1)\Delta_j}; \tilde{\varepsilon}^{(2)e} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \varepsilon^{(2)\Delta_j} \quad (5.52)$$

$$\tilde{\varepsilon}_s^e = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \varepsilon_s^{\Delta_j} d\Omega; \tilde{\kappa}_s^e = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \kappa_s^{\Delta_j} d\Omega \quad (5.53)$$

với A_{Δ_j} , $j=1,2,3$ là phần diện tích tam giác con Δ_j .

Thay thế các thành phần biến dạng từ (5.46)-(5.48) vào (5.51)-(5.53), thu được:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_m^{Le} &= \tilde{\mathbf{B}}^m \mathbf{d}^e; \tilde{\varepsilon}_m^{NLe} = \tilde{\mathbf{B}}^{mNL} \mathbf{d}^e; \tilde{\varepsilon}^{(1)e} = \tilde{\mathbf{B}}^{b_1} \mathbf{d}^e \\ \tilde{\varepsilon}^{(2)e} &= \tilde{\mathbf{B}}^{b_2} \mathbf{d}^e; \tilde{\varepsilon}_s^e = \tilde{\mathbf{B}}_{i-MITC3}^{s_0} \mathbf{d}^e; \tilde{\kappa}_s^e = \tilde{\mathbf{B}}^s \mathbf{d}^e \end{aligned} \quad (5.54)$$

trong đó $\tilde{\mathbf{B}}^m$, $\tilde{\mathbf{B}}^{mNL}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{b_1}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{b_2}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{s_0}$, $\tilde{\mathbf{B}}^{s_1}$ được gọi là các ma trận biến dạng tron của phần tử được xác định theo (5.51):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}}^m &= \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{m\Delta_j}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{mNL} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{mNL\Delta_j} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{b_1} &= \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{b_1\Delta_j}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{b_2} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{B}^{b_2\Delta_j} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{s_0} &= \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \mathbf{B}_{i-MITC3}^{s_0\Delta_j} d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{B}}^{s_1} = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta_j} \mathbf{B}_s^{s_1\Delta_j} d\Omega\end{aligned}\quad (5.55)$$

Ma trận độ cứng tổng thể của phương pháp CS-MITC3:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{K}}^e \quad (5.56)$$

với:

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \tilde{\mathbf{K}}_L^e + \tilde{\mathbf{K}}_{NL}^e + \tilde{\mathbf{K}}_g^e \quad (5.57)$$

Thành phần $\tilde{\mathbf{K}}_L^e$ là ma trận độ cứng tuyến tính phần tử:

$$\tilde{\mathbf{K}}_L^e = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{D}^* \tilde{\mathbf{B}}_j d\Omega + \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{S}}_i^T \mathbf{D}_s^* \mathbf{S}_j d\Omega \quad (5.58)$$

trong đó:

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_i^m)^T & (\tilde{\mathbf{B}}_{1i}^b)^T & (\tilde{\mathbf{B}}_{2i}^b)^T \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_{0i-ES-MITC3}^s)^T & (\tilde{\mathbf{B}}_{1i}^s)^T \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Thành phần $\tilde{\mathbf{K}}_{NL}^e$ là ma trận độ cứng phi tuyến phần tử:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{NL}^e = \int_{\Omega_e} (\tilde{\mathbf{B}}_{Li}^T \mathbf{D}^{**} \tilde{\mathbf{B}}_{Lj} + \tilde{\mathbf{B}}_{NLi}^T \mathbf{D}^{**} \tilde{\mathbf{B}}_{Lj} + \tilde{\mathbf{B}}_{NLi}^T \mathbf{D}^{**} \tilde{\mathbf{B}}_{NLj}) d\Omega \quad (5.61)$$

với:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{Li} = [\tilde{\mathbf{B}}_i \quad \tilde{\mathbf{S}}_i]^T; \quad \tilde{\mathbf{B}}_{NLi} = [\tilde{\mathbf{B}}_i^{mNL} \quad \mathbf{0}]^T \quad (5.62)$$

trong đó:

$$\tilde{\mathbf{B}}_i^{mNL} = \bar{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{Y}}_i \quad (5.63)$$

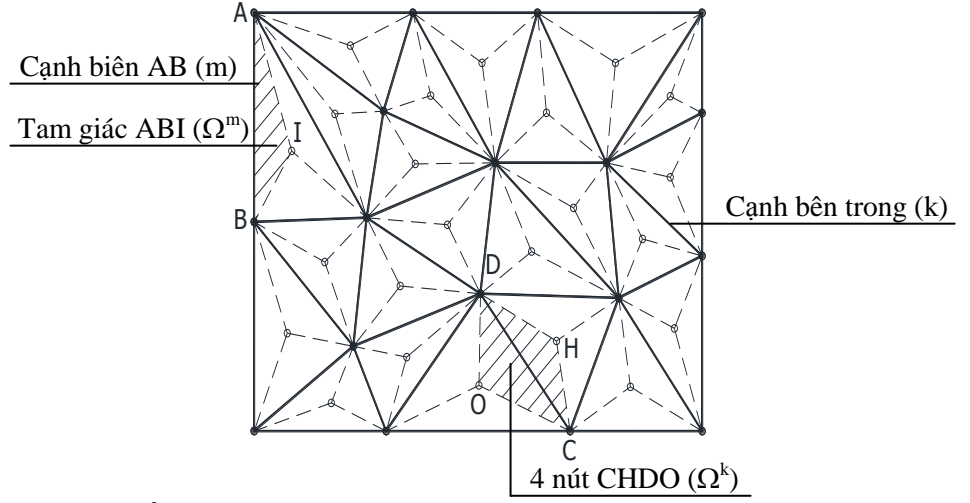
với $\bar{\mathbf{C}}$ được tính toán theo (5.24) và $\tilde{\mathbf{Y}}_i$ được xác định theo (5.64):

$$\tilde{\mathbf{Y}}_i = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^3 A_{\Delta_j} \mathbf{Y}^{\Delta_j} \quad (5.64)$$

Thành phần $\tilde{\mathbf{K}}_g^e$ là ma trận độ cứng hình học phần tử:

$$\tilde{\mathbf{K}}_g^e = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{Y}}_i^T \bar{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{Y}}_j d\Omega \quad (5.65)$$

5.6.2 Mô hình ES-FEM cho phần tử MITC3



Hình 5.3: Miền làm tròn (Ω^k) theo phương pháp ES-MITC3

Theo phương pháp này thì miền làm tròn dựa trên cạnh phần tử ([153], [179], [180], [181], [182], [183], [184], [185], [186], [187]), sao cho:

$$\Omega \approx \bigcup_{k=1}^{N_{ed}} \Omega^k \quad \text{và} \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \Phi \quad \text{với} \quad i \neq j \quad (5.66)$$

với N_{ed} là tổng số cạnh của tất cả các phần tử trên miền khảo sát.

Đối với phần tử tam giác 3 nút, miền tròn Ω^k liên quan đến cạnh thứ k được tạo ra bằng cách kết nối hai nút cuối của cạnh với trọng tâm của phần tử liền kề (**Hình 5.3**). Từ việc sử dụng các miền tròn dựa trên cạnh phần tử, các biến dạng tròn $\bar{\varepsilon}_k$ có thể xác định được từ sự tính toán các biến dạng tương ứng ε_h kết hợp với một thao tác làm tròn trên miền Ω^k liên quan đến cạnh thứ k :

$$\bar{\varepsilon}_k = \int_{\Omega^{(k)}} \varepsilon^h(x) \Phi(x) d\Omega \quad (5.67)$$

trong đó $\Phi(x)$ là một hàm có chức năng làm tròn và thỏa mãn các điều kiện [188]:

$$\Phi(x) \geq 0 \quad \text{và} \quad \int_{\Omega^k} \Phi(x) d\Omega = 1 \quad (5.68)$$

Để đơn giản hàm $\Phi(x)$ được chọn là một hàm hằng số theo từng mảng:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{A^{(k)}} & x \in \Omega^{(k)} \\ 0 & x \notin \Omega^{(k)} \end{cases} \quad (5.69)$$

trong đó:

$$A^{(k)} = \int_{\Omega^k} d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \quad \text{là diện tích của miền tròn } \Omega^k \quad (5.70)$$

và $N_e^k = 1$ đối với các cạnh biên, $N_e^k = 2$ đối với các cạnh bên trong, A_i là diện tích của phần tử thứ i xung quanh cạnh k .

Từ phương trình (5.31) và (5.32) biến dạng của phần tử trở thành:

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega^{(k)}} \varepsilon^h d\Omega \quad (5.71)$$

Ma trận chuyển vị và biến dạng tron được xác định bởi:

$$\bar{\mathbf{B}}_I(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega^{(k)}} \mathbf{B}_I(x) d\Omega \quad (5.72)$$

Đối với phần tử tam giác 3 nút MITC3, hàm dạng là tuyến tính. Do đó ma trận biến dạng chuyển vị là hằng số trên phần tử. Kết hợp các phương trình từ (5.23a)-(5.23e) và (5.72) ta có:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_I^m(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^m; \bar{\mathbf{B}}_I^{b1}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^{b1} \\ \bar{\mathbf{B}}_I^{b2}(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}_j^{b2}; \bar{\mathbf{B}}_I^{s0}(x_k) = \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \tilde{\mathbf{B}}_{j-MITC3}^{s0} \\ \bar{\mathbf{B}}_I^{s1}(x_k) &= \frac{1}{A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} \int_{A_i} \mathbf{B}_I^{s1}(x) d\Omega = \frac{c}{3A^{(k)}} \sum_{i=1}^{N_e^k} A_i \mathbf{B}^* \end{aligned} \quad (5.73)$$

trong đó c là hằng số được xác định từ (5.7) và $\mathbf{B}_j^m, \mathbf{B}_j^{b1}, \mathbf{B}_j^{b2}, \mathbf{B}_{j-MITC3}^{s0}$ là các ma trận biến dạng của phần tử thứ j xung quanh cạnh k . $\mathbf{B}_j^m, \mathbf{B}_j^{b1}, \mathbf{B}_j^{b2}$ được xác định từ (5.23a), (5.23b), (5.23c). $\mathbf{B}_{j-MITC3}^{s0}$ được xác định như trong chương 4 và:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Ma trận độ cứng tuyến tính phần tử ES-MITC3

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \sum_{k=1}^{N_{ed}} \tilde{\mathbf{K}}^k \quad (5.75)$$

với:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}^k &= \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_I^m \right)^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^m \right)^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^m \right)^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\ &+ \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} \right)^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} \right)^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} \right)^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\ &+ \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right)^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}_I^m + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right)^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b1} + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right)^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{B}}_I^{b2} \right] A^k \\ &+ \left[\left(\tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0} \right)^T \mathbf{A}^s \tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0} + \left(\tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0} \right)^T \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right)^T \mathbf{B}^s \tilde{\mathbf{B}}_{I-ES-MITC3}^{s0} + \left(\tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right)^T \mathbf{D}^s \tilde{\mathbf{B}}_I^{s1} \right] A^k \end{aligned} \quad (5.76)$$

Thành phần ma trận độ cứng phi tuyến và ma trận hình học xác định tương tự như phương pháp CS-MITC3.

5.7. Phương pháp giải lặp Newton-Raphson

Phương pháp lặp Newton-Raphson [200] thực hiện một số bước tính lặp để đưa chuyển vị của hệ về gần chuyển vị thật với cấp tải tương ứng. Sau mỗi bước tăng tải sẽ xuất hiện một độ lệch giữa ngoại lực và nội lực, các bước tính lặp của phương pháp này làm cho độ lệch giảm dần và nội lực của hệ cũng thay đổi theo. Chuyển vị của hệ sẽ tiến đến chuyển vị thực sự ứng với tải trọng tác dụng. Khi đó nội lực trong hệ cũng hội tụ với ngoại lực tác dụng. Chu trình tính lặp này sẽ thực hiện cho đến khi thỏa tiêu chuẩn hội tụ. Phương pháp lặp Newton-Raphson dựa trên khai triển chuỗi Taylor mở rộng.

Trường chuyển vị tổng quát của phương pháp được giải từ phương trình:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1})\mathbf{d}_{s+1} = \mathbf{P} \quad (5.77)$$

Phương pháp lặp được thực hiện:

$$\mathbf{R}\mathbf{d}_{s+1} = \mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1})\mathbf{d}_{s+1} - \mathbf{P} \quad (5.78)$$

trong đó: \mathbf{R} là ma trận cứng dư, $\mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1})$ là ma trận cứng tuyến tính tương ứng với vector chuyển vị \mathbf{d}_{s+1}

Khai triển thành phần \mathbf{R} trong chuỗi Taylor ứng với trường chuyển vị \mathbf{d}_{s+1}^r :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{s+1} + \mathbf{K}_g \mathbf{d}_{s+1}^r \delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{NL} (\{\delta \mathbf{d}\}^2) \quad (5.79)$$

với: \mathbf{K}_{NL} là ma trận cứng phi tuyến, \mathbf{K}_g là ma trận cứng hình học.

Giá trị \mathbf{R}_{s+1}^r được xác định:

$$\mathbf{R}_{s+1}^r = \mathbf{K}(\mathbf{d}_{s+1}^r)\mathbf{d}_{s+1}^r - \mathbf{P} \quad (5.80)$$

Cuối cùng:

$$\delta \mathbf{d} = -[\mathbf{K}_g \mathbf{d}_{s+1}^r]^{-1} \mathbf{R}_{s+1}^r \quad (5.81)$$

$$\mathbf{d}_{s+1}^{r+1} = \mathbf{d}_{s+1}^r + \delta \mathbf{d} \quad (5.82)$$

5.8. Kết quả số

Trong phần này, một số ví dụ số được áp dụng để khảo sát phi tuyến bài toán tĩnh của tấm FGM và tấm composite nhiều lớp (laminates) chịu tải phân bố đều. Kết quả của luận án có sự so sánh với một số nghiên cứu đã công bố. Thành phần tải trọng, chuyển vị tại tâm của tấm được chuẩn hoá:

$$Q = \frac{qa^4}{E_m h^4}; Q_1 = \frac{qa^4}{E_2 h^4}; u_{3c} = \frac{u_3}{h} \quad (5.83)$$

5.8.1 Tấm FGM thông thường

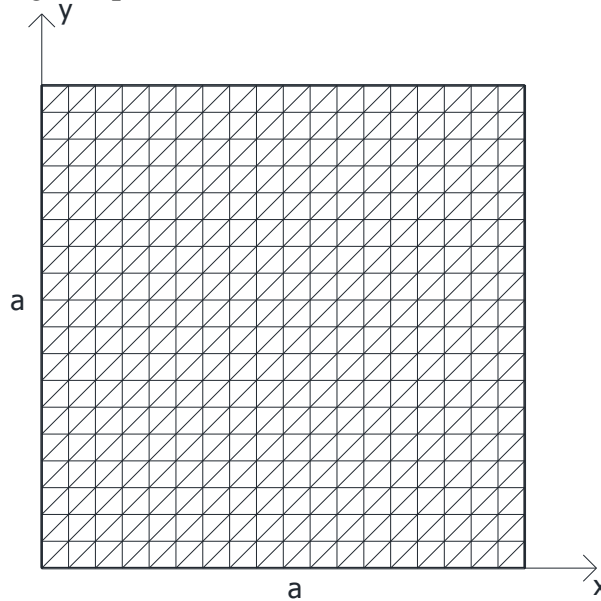
Để xác định mức độ tin cậy của lời giải phi tuyến hình học, luận án xét tấm FGM hình vuông liên kết ngàm có cạnh là a , chiều dày tấm là h chịu tải trọng phân bố đều với mặt trên giàu ceramic và mặt dưới giàu kim loại. Tính chất vật liệu của các thành phần như sau:

$E_c=348.43\text{GPa}$, $\nu_c=0.24$ (vật liệu gốm - Si_3N_4).

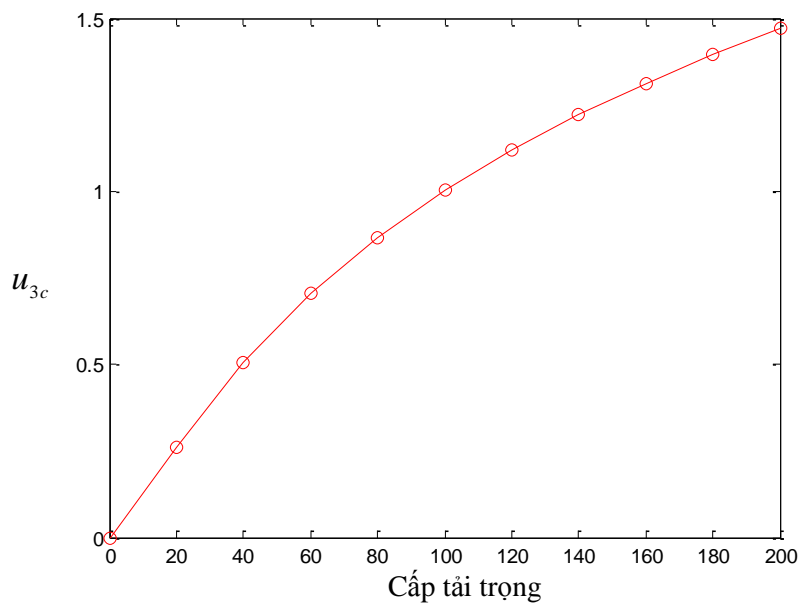
$E_m=201.04\text{GPa}$, $\nu_m=0.3262$ (vật liệu kim loại – SUS304).

Tấm được mô hình bằng hệ lưới 36×36 phần tử tam giác như **Hình 5.4**.

Kết quả tính toán được so sánh với Kar và Panda [201] và so sánh với Yang và Shen [202] được thể hiện trong **Bảng 5.1**. Có thể nhận thấy rằng kết quả nghiên cứu gần đúng với kết quả của lời giải Yang và Shen [202], đặc biệt khi tăng cấp tải Q thì sai số với lời giải Yang và Shen [202] là rất bé. **Hình 5.5** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phần tử CS-MITC3.



Hình 5.4: Sơ đồ chia lưới phần tử (36×36)



Hình 5.5: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông FGM ($p = 2$) liên kết ngàm ($a/h = 10$, CS)

Bảng 5.1: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông FGM liên kết ngàm chịu tải phân bố đều ($a/h = 10$)

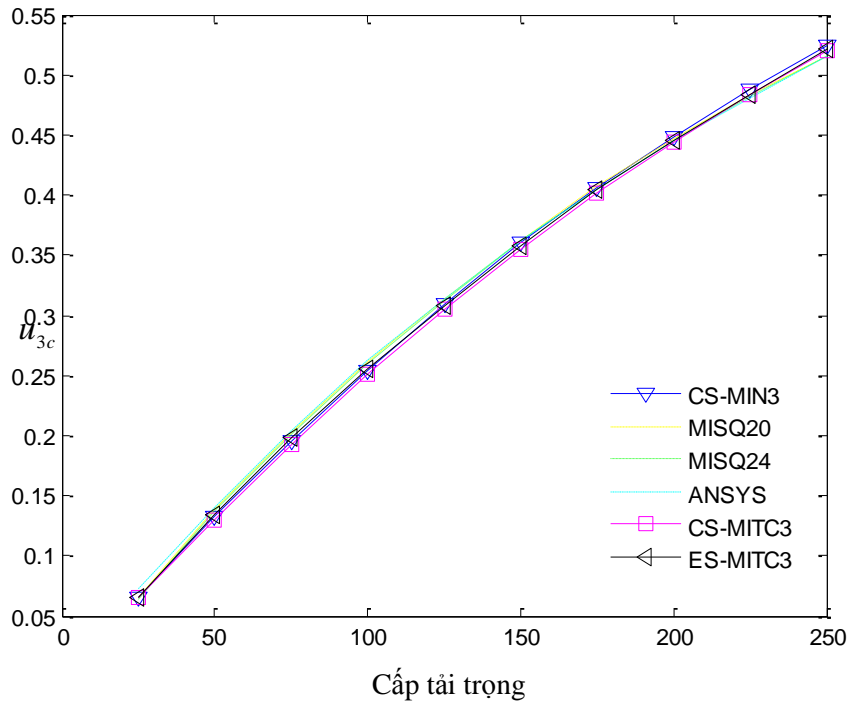
p	$\frac{qa^4}{E_m h^4}$	Luận án (CS)	Luận án (ES)	Kar [201]	$\Delta_{cs}(\%)$	Yang [202]	$\Delta_{cs}(\%)$
0.2	20	0.2201	0.2148	0.2358	6.7	0.2470	10.9
	40	0.4194	0.4055	0.4716	11.1	0.4570	8.2
	60	0.5934	0.5872	0.7065	16.0	0.6450	8.0
	80	0.7412	0.7204	0.9401	21.1	0.7980	7.1
2.0	20	0.2614	0.2573	0.2873	9.0	0.2770	5.6
	40	0.5034	0.4981	0.5748	12.4	0.5190	3.0
	60	0.7032	0.6911	0.8607	18.3	0.7330	4.1
	80	0.8661	0.8624	1.1444	24.3	0.8850	2.1

5.8.2 Tấm composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$

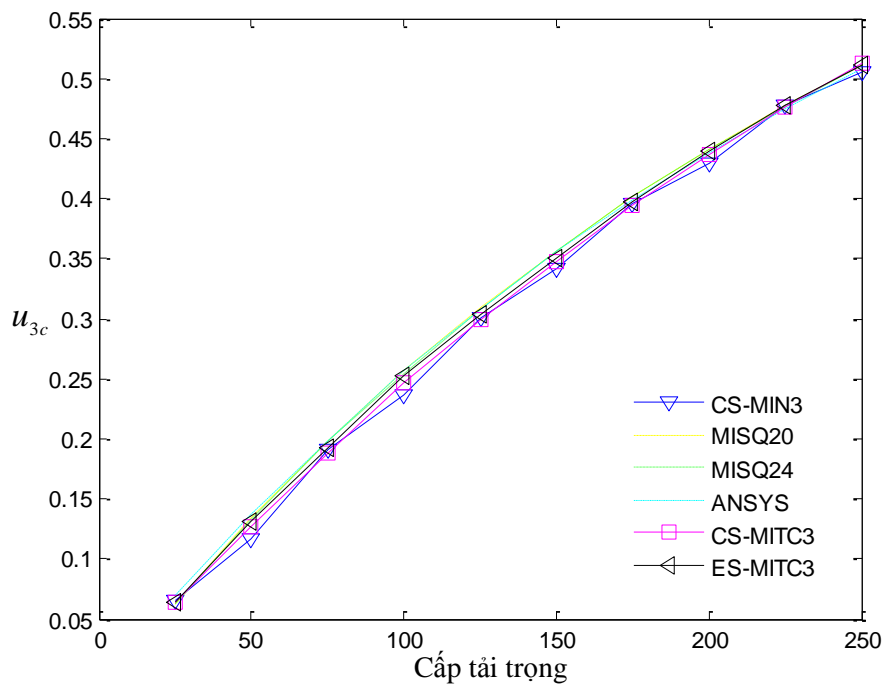
Trong phần này, luận án sẽ tiến hành phân tích tấm composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ hình vuông có cạnh là a , chiều dày tấm là h chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1=40E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$. Giả thiết chiều dày các lớp bằng nhau và bằng $h/2$. Kết quả lời giải của luận án rất tốt khi so sánh với một số phương pháp như: CS-MIN3, MISQ20, MISQ24 và phần mềm ANSYS (Bảng 5.2). Hình 5.6 và 5.7 biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phần tử CS-MITC3 ứng với trường hợp $a/h = 50$ và $a/h = 100$.

Bảng 5.2: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ bốn biên liên kết ngàm chịu tải phân bố đều

a/h	$\frac{qa^4}{E_2 h^4}$	Luận án (CS)	Luận án (ES)	CS-MIN3 [170]	MISQ20 [203]	MISQ24 [203]	Ansys [170]
50	25	0.066	0.066	0.066	0.066	0.064	0.072
	50	0.130	0.134	0.132	0.139	0.137	0.140
	75	0.192	0.199	0.195	0.203	0.202	0.204
	100	0.251	0.256	0.254	0.261	0.260	0.262
	125	0.305	0.308	0.309	0.314	0.312	0.314
	150	0.355	0.358	0.360	0.362	0.362	0.362
	175	0.401	0.404	0.406	0.407	0.405	0.405
	200	0.444	0.445	0.449	0.447	0.445	0.445
	225	0.483	0.484	0.488	0.484	0.482	0.481
	250	0.520	0.522	0.524	0.516	0.516	0.515
100	25	0.064	0.064	0.066	0.063	0.063	0.070
	50	0.127	0.131	0.117	0.134	0.113	0.137
	75	0.188	0.193	0.191	0.198	0.198	0.199
	100	0.246	0.253	0.237	0.257	0.254	0.257
	125	0.299	0.304	0.301	0.309	0.308	0.308
	150	0.348	0.351	0.341	0.357	0.356	0.356
	175	0.394	0.397	0.396	0.401	0.401	0.399
	200	0.437	0.439	0.429	0.441	0.441	0.438
	225	0.476	0.477	0.477	0.478	0.476	0.474
	250	0.512	0.511	0.506	0.511	0.511	0.508



Hình 5.6: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ liên kết ngầm ($a/h = 50$)



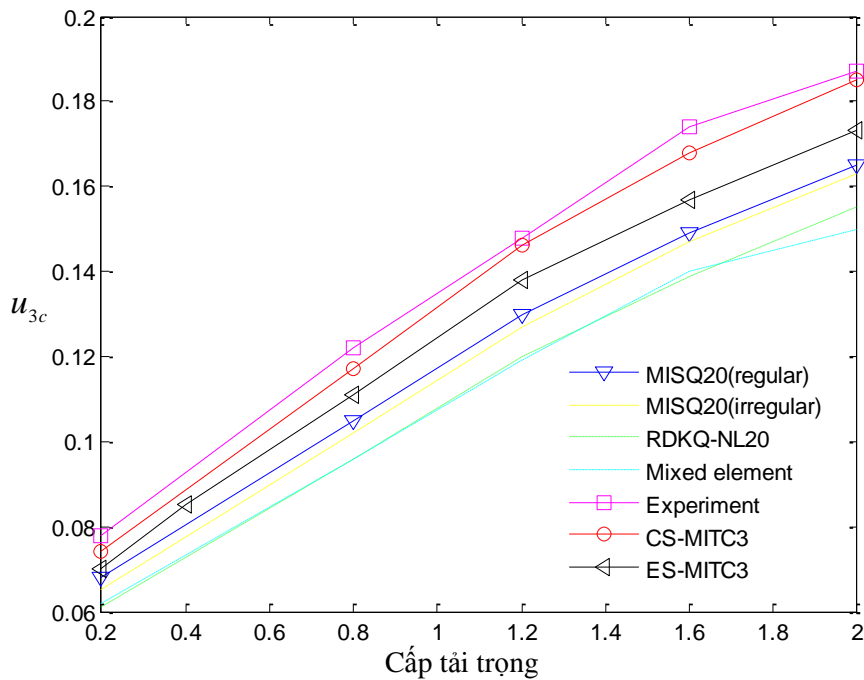
Hình 5.7: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 2 lớp $[0^\circ/90^\circ]$ liên kết ngầm ($a/h = 100$)

5.8.3 Tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Luận án tiếp tục phân tích tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ hình vuông có cạnh là $a = 12$, chiều dày tấm là $h = 0.096$ bốn biên ngàm chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1 = 1.8282 \times 10^6$, $E_2 = 1.8315 \times 10^6$, $\nu_{12} = 0.23494$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.125 \times 10^5$. Giả thiết chiều dày các lớp bằng nhau và bằng $h/4$. Lời giải của luận án được so sánh với các phương pháp như: MISQ20, RDKQ-NL20, Mixed element, Experiment (**Bảng 5.3**). Kết quả luận án tương đối phù hợp với kết quả thí nghiệm (Experiment), một vài giá trị sai khác không quá 1% và **Hình 5.8** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phần tử CS-MITC3.

Bảng 5.3: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ liên kết ngàm chịu tải phân bố đều

Model	$q=0.4$	$q=0.8$	$q=1.2$	$q=1.6$	$q=2.0$
MISQ20 (regular) [204]	0.068	0.105	0.130	0.149	0.165
MISQ20 (irregular) [204]	0.065	0.102	0.127	0.147	0.163
RDKQ-NL20 [205]	0.061	0.096	0.120	0.139	0.155
Mixed element [206]	0.062	0.096	0.119	0.140	0.150
Experiment [206]	0.078	0.122	0.148	0.174	0.187
Luận án (CS)	0.074	0.117	0.146	0.168	0.185
Luận án (ES)	0.071	0.111	0.138	0.157	0.173



Hình 5.8: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ bốn biên liên kết ngàm

Để khẳng định hơn nữa mức độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu này, luận án tiếp tục phân tích tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ hình vuông có cạnh là a , chiều dày tấm là h bốn biên tựa đơn SS1 chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1 = 25E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$. Kết quả lời giải

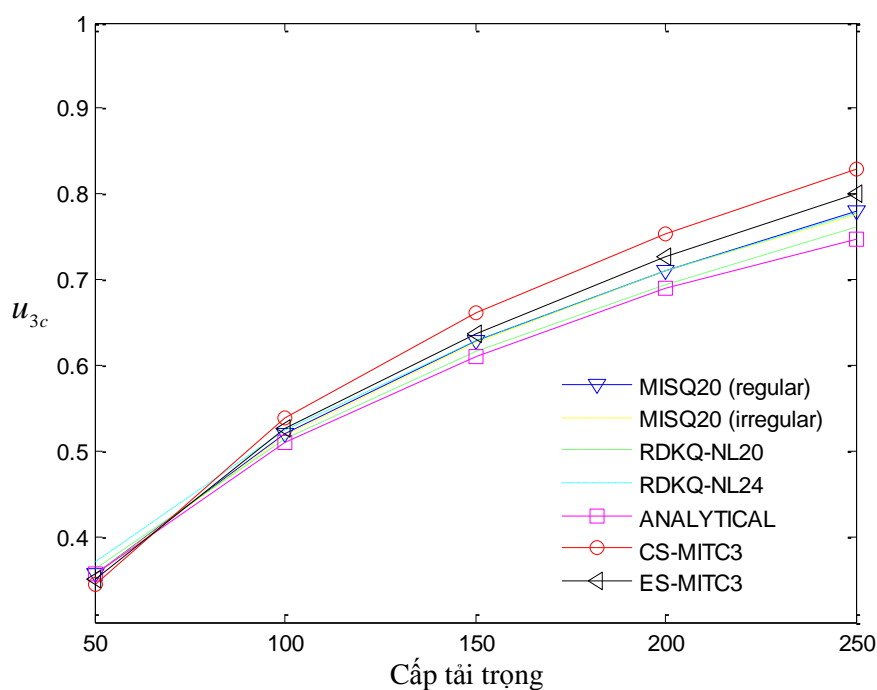
của luận án được so sánh với một số phương pháp như: MISQ20, RDKQ-NL20, RDKQ-NL24 và phương pháp giải tích (Analytical) (**Bảng 5.4**). **Hình 5.9** và **5.10** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của phương pháp nghiên cứu ứng với trường hợp: $a/h = 10$ và $a/h = 40$.

- Tựa đơn SS1:

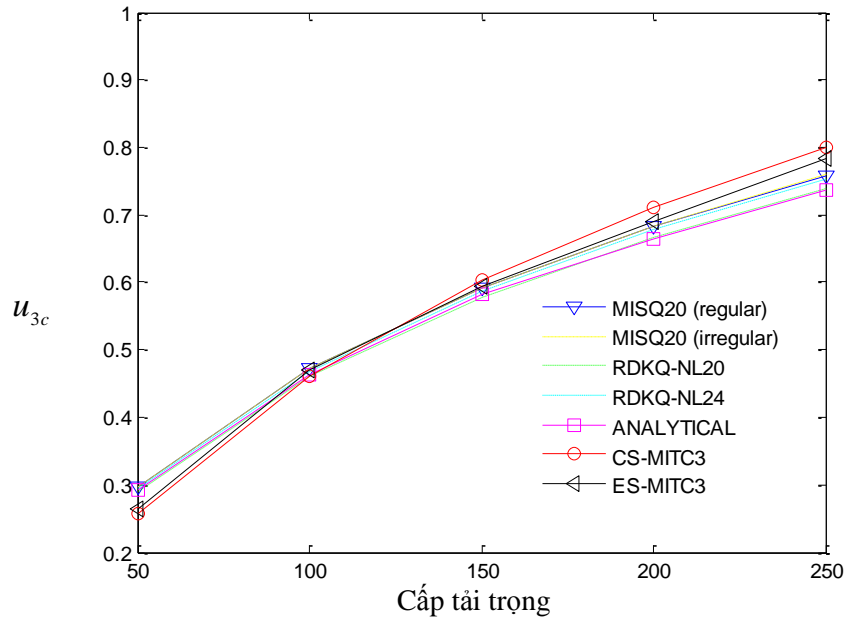
$$x = \pm a/2 : v_0 = w_0 = \theta_y = \phi_y = 0; y = \pm a/2 : u_0 = w_0 = \theta_x = \phi_x = 0$$

Bảng 5.4: Giá trị chuyển vị không thứ nguyên (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn chịu tải phân bố đều

$\frac{a}{h}$	$\frac{qa^4}{E_2h^4}$	Luận án (CS)	Luận án (ES)	MISQ20 (regular) [204]	MISQ20 (irregular) [204]	RDKQ-NL20 [205]	RDKQ-NL24 [205]	Analytical [207]
40	50	0.257	0.265	0.296	0.298	0.291	0.294	0.293
	100	0.460	0.470	0.473	0.473	0.461	0.467	0.464
	150	0.603	0.595	0.592	0.592	0.577	0.587	0.582
	200	0.712	0.691	0.683	0.683	0.667	0.679	0.664
	250	0.801	0.784	0.759	0.760	0.740	0.754	0.738
20	50	0.302	0.308	0.312	0.312	0.323	0.327	0.320
	100	0.509	0.491	0.487	0.485	0.487	0.494	0.486
	150	0.644	0.625	0.603	0.601	0.597	0.608	0.592
	200	0.746	0.723	0.691	0.690	0.682	0.695	0.680
	250	0.830	0.801	0.765	0.762	0.751	0.766	0.752
10	50	0.343	0.351	0.356	0.356	0.363	0.370	0.356
	100	0.538	0.526	0.521	0.519	0.514	0.525	0.510
	150	0.662	0.637	0.629	0.626	0.616	0.629	0.610
	200	0.754	0.726	0.711	0.710	0.695	0.710	0.689
	250	0.830	0.800	0.779	0.776	0.761	0.777	0.747



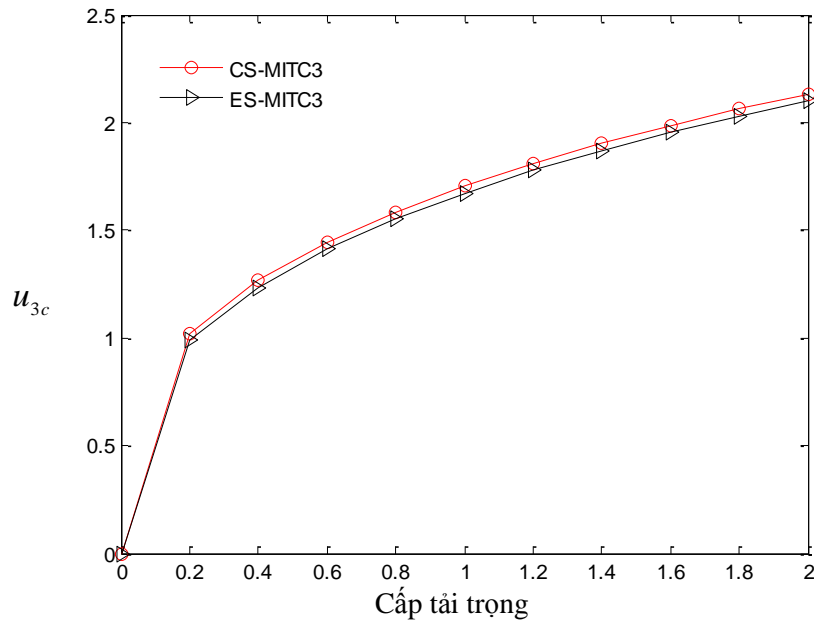
Hình 5.9: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS1 ($a/h = 10$)



Hình 5.10: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS1 ($a/h = 40$)

Cuối cùng, luận án xét lại tấm composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ hình vuông có cạnh là $a = 12$, chiều dày tấm là $h = 0.096$ bốn biên tựa đơn SS3 chịu tải trọng phân bố đều với đặc trưng vật liệu như sau: $E_1 = 1.8282 \times 10^6$, $E_2 = 1.8315 \times 10^6$, $\nu_{12} = 0.23494$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.125 \times 10^5$. **Hình 5.11** biểu diễn mối quan hệ giữa chuyển vị và tải trọng của hai phương pháp CS-MITC3 và ES-MITC3.

- Tựa đơn SS3: $x = \pm a/2 : u_0 = v_0 = w_0 = 0$; $y = \pm a/2 : u_0 = v_0 = w_0 = 0$



Hình 5.11: Giá trị chuyển vị (u_{3c}) của tấm vuông composite 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn SS3

5.9. Kết luận

Trong chương này đã phát triển các phần tử CS-MITC3 và ES-MITC3 có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến để phân tích bài toán tĩnh của tấm FGM và tấm composite nhiều lớp chịu tải trọng cơ học khi dùng PP PTHH. Một số điểm nổi bật của chương này:

- Kết quả nghiên cứu của luận án có độ chính xác cao vì đã so sánh được với các lời giải tính toán theo các phương pháp khác nhau của nhiều tác giả ứng với một số dạng bài toán khác nhau.
- Sử dụng phần tử bậc C^0 xấp xỉ trường chuyển vị giúp cho việc tính toán được đơn giản hơn.
- Các phần tử phát triển trong luận án có sự tương đồng về kết quả phân tích.
- Luận án cũng đã khảo sát rất chi tiết sự ảnh hưởng của mật độ vật liệu phân bố trong tấm, tỉ lệ hai cạnh, tỉ lệ cạnh trên chiều dày tấm, cấu trúc các phân lớp, các điều kiện biên khác nhau, các cấp tải trọng... lên thành phần chuyển vị của tấm. Điều này giúp cho các nhà nghiên cứu, các nhà thiết kế có được những dự báo cũng như các tiên đoán cần thiết khi nghiên cứu về các đối tượng này.

CHƯƠNG 6

HIỆU ỨNG CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN CÁC ĐẶC TÍNH ĐÀN HỒI ĐỒNG NHẤT HÓA ĐẾN ỨNG XỬ TẤM FGM

6.1 Giới thiệu

Như đã trình bày ở Chương 1, vật liệu phân lớp chức năng (FGM) có sự sắp xếp các tính chất vật liệu thay đổi dần dần theo yêu cầu chức năng sử dụng, điều này tránh được vấn đề tập trung ứng suất và tách lớp đối với các tấm composite thông thường. Tuy nhiên, ở cấp độ vi mô loại vật liệu này vẫn là vật liệu không đồng nhất và do đó cần thiết có các mô hình phân tích phù hợp. Hiện nay, có rất nhiều mô hình cơ học vi mô cho phép tính toán các đặc tính đàn hồi hữu hiệu của vật liệu composite, bao gồm cả tấm FGM trong đó có thể đến một số mô hình điển hình như sau: Voigt, Reuss, Hanshin và Shtrikman, Mori-Tanaka... Trong thực tế, việc nghiên cứu hiệu ứng của các mô hình cơ học vi mô đến ứng xử tấm FGM cũng thu hút một số ít tác giả. Chương này sẽ phân tích một số mô hình cơ học vi mô trong tính toán đặc tính đồng nhất hóa vật liệu FGM và hiệu ứng của nó đến đáp ứng tấm FGM.

6.2 Các mô hình tính toán các đặc tính đàn hồi hữu hiệu tấm FGM

Tổng quan tình hình nghiên cứu cho thấy rằng để đánh giá đặc tính đàn hồi hữu hiệu tấm FGM có phân biệt làm hai mô hình tính toán chính: mô hình liên tục và mô hình rời rạc. Mô hình liên tục giả thiết vật liệu phân bố liên tục theo hướng chiều dày tấm và không kể đến hiệu ứng cấu trúc vi mô vật liệu, sau đó các mô đun đàn hồi vật liệu sẽ được tính toán bằng các mô hình trung bình thông qua các biểu thức giải tích. Mô hình rời rạc kể đến cấu trúc vi mô với các dạng hình học được lý tưởng hóa, sau đó các phương pháp số sẽ được áp dụng. Trong cả hai cách tiếp cận, đầu tiên tấm được đồng nhất hoá với các mô đun đàn hồi hữu hiệu như mô đun Young, hệ số Poisson, hệ số dẫn nhiệt... sau đó độ cứng tấm sẽ được tính toán dựa trên lý thuyết tấm đồng nhất. Đối với mô hình liên tục, hầu hết các phương pháp đều dựa trên phương pháp đồng nhất hóa trung bình trong đó các mô đun đàn hồi hữu hiệu được tính toán, dựa trên các biểu thức giải tích, theo các đặc tính vật liệu

thành phần và mật độ thể tích tương ứng. Trong thực tế, mô hình Voigt và Reuss [3] dựa trên nguyên lý cực tiểu năng lượng biến dạng và năng lượng bù được sử dụng rộng rãi trong tính toán các mô đũađài hồi FGM do tính đơn giản của các công thức tính toán, trong đó có thể kể đến một số nghiên cứu điển hình (Reddy, Zenkour, Sobhy, Nguyen và cộng sự...). Tuy nhiên cần chú ý rằng mô hình này chỉ phù hợp đối với vật liệu có độ tương phản không lớn, ngược lại khoảng cách giữa các cận khá lớn và không cho kết quả phù hợp. Một cách tiếp cận khác cũng đã được áp dụng cho vật liệu FGM là mô hình tự tương thích (self-consistent [208]). Về áp dụng, sơ đồ này không phân biệt pha vật liệu nền hay vật liệu cốt gia cường, do đó cách tiếp cận này phù hợp cho các miền chuyển tiếp giữa 2 vật liệu [209]. Vel và Batra [210] cũng đã áp dụng mô hình này và mô hình Mori-Tanaka ([8], [9]) đánh giá các đặc tính hữu hiệu vật liệu FGM. Thực tế mô hình Mori-Tanaka là mô hình trung bình trong đó giả thiết một hạt gia cường hình cầu bao bọc bởi vật liệu nền, do đó mô hình này phù hợp cho tính toán miền vật liệu với vật liệu nền và cốt gia cường. Một số mô hình cơ học vi mô khác tính toán vật liệu composite không đồng nhất có thể tìm thấy trong một số nghiên cứu (Suresh và Mortensen [211]; Gasik [13]; Aboudi và cộng sự [212]; Cho và Ha [213], Nguyen và cộng sự ([214], [215])). Trong phân tích ứng xử tấm FGM, mô hình liên tục cho thấy tính đơn giản hóa nên đã được sử dụng phổ biến nhằm dự báo ứng xử tấm FGM. Tuy nhiên, việc phân tích hiệu ứng các mô hình này đến đáp ứng tấm FGM còn rất giới hạn về số lượng.

- Mô hình Voigt ([3], [4], [5]): theo (1.1).
- Mô hình Reuss ([3], [4], [5]): theo (1.2).
- Mô hình Hashin-Shtrikman cận dưới và cận trên ([6], [7]): theo (1.3) và (1.4).
- Mô hình Tamura ([8], [9]): theo (1.5).
- Mô hình SCM (Self-Consistent Method) ([10], [11]): theo (1.6).
- Mô hình LRVE được xây dựng bởi Gasik và Lilius ([12], [13]): theo (1.7).

Hàm mật độ thể tích:

Xem xét tấm FGM hình chữ nhật có cạnh dài là a , cạnh ngắn là b và chiều dày là h được tạo hai loại vật liệu là gốm và kim loại. Khi xác định được các đặc tính hữu hiệu của tấm người ta dựa vào hàm mật độ thể tích (VF) để diễn tả giá trị các đặc trưng vật liệu theo chiều dày tấm. Một số quy luật phân bố các đặc tính hữu hiệu của vật liệu đã được nghiên cứu như: quy luật hàm lũy thừa (P-FGM), quy luật hàm Sigmoid (S-FGM), hay hàm mũ (E-FGM).

$$VF = VF_t + (VF_b - VF_t) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (\text{P-FGM}) \quad (6.1a)$$

$$VF = \begin{cases} VF_t + (VF_b - VF_t) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h} \right)^p \right), & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ VF_t + (VF_b - VF_t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h} \right)^p \right), & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (\text{S-FGM}) \quad (6.1b)$$

$$VF = VF_t \exp \left(\ln \left(\frac{VF_b}{VF_t} \right) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \right) \quad (\text{E-FGM}) \quad (6.1c)$$

trong đó VF_t, VF_b là giá trị thành phần thể tích tại mặt trên ($z = h/2$) và mặt dưới ($z = -h/2$) của tấm, p là hệ số biểu diễn đặc trưng vật liệu của tấm FGM.

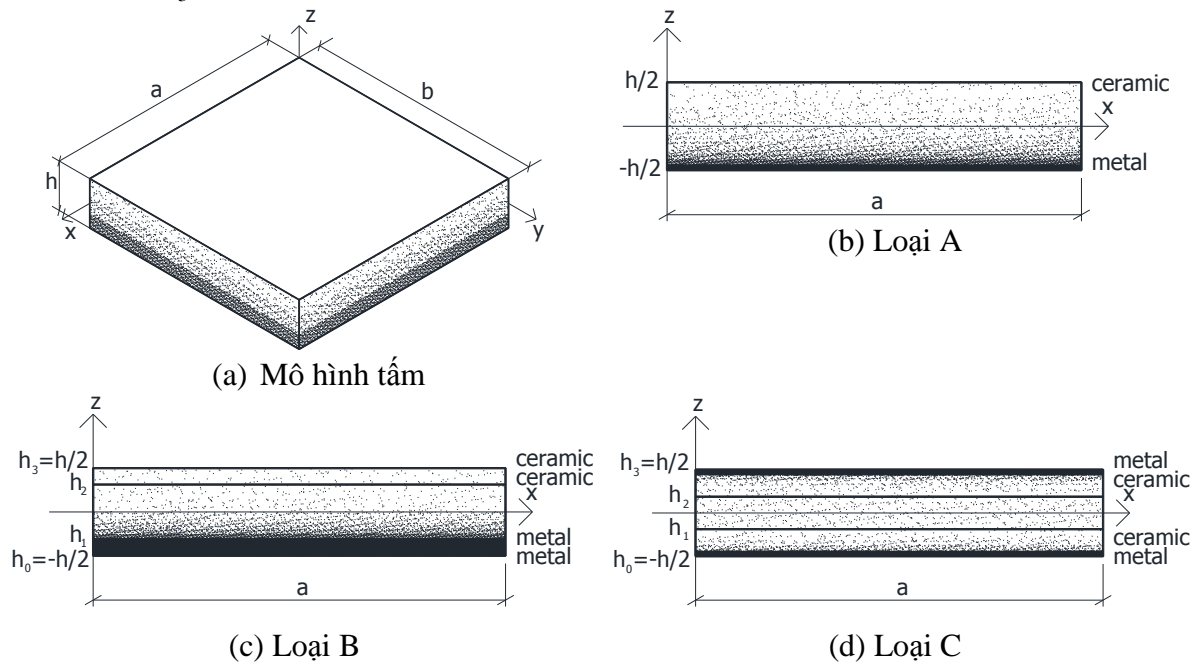
6.3 Xây dựng phương trình tính toán tấm FGM cho các mô hình theo HSDT

Để đánh giá sự ảnh hưởng của các mô hình tính toán các đặc trưng hữu hiệu khi phân tích ứng xử vật liệu FGM, luận án tiến hành phân tích lại các mô hình: Voigt, Reuss, Hashin (LB), Hashin (UB), LRVE, Tamura, SCM cho kết cấu tấm FGM (Hình 6.1) sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ($\varepsilon_{zz} = 0$) của Chương 3.

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \left(h \arctan \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{16z^3}{15h^2} \right) \theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \left(h \arctan \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{16z^3}{15h^2} \right) \theta_y(x, y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y)$$



Hình 6.1: Mô hình tấm FGM

6.4 Phương pháp tính toán

Sử dụng lời giải Navier xấp xỉ trường chuyển vị:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t} \\
 w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y e^{i\omega t} \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.5 Kết quả số

Trong chương này, một số ví dụ số áp dụng cho tấm FGM với đặc tính vật liệu được lấy theo **Bảng 6.1**, kích thước hình vuông, 4 biên tựa đơn và chịu tải phân bố đều.

Bảng 6.1: Đặc tính vật liệu của kim loại và gốm

Vật liệu	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Aluminum alloy 1100	69	2710	0.33
Ceramic (Al ₂ O ₃ 99% pure)	380	3980	0.22

Biến thiên của mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số Poisson theo quy luật hàm lũy thừa, hàm Sigmoid và hàm số mũ thay đổi theo chiều dày tấm. Luận án tiến hành khảo sát các bài toán tĩnh, ổn định và dao động tự do của tấm. Các đại lượng không thứ nguyên được dùng cho lời giải:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_3 &= \frac{10E_c h^3}{a^4 q_0} u_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right), \bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{E_m h^3}, \hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{100E_0 h^3}, E_0 = 1 \text{ GPa} \\
 \bar{\omega} &= \frac{\omega a b}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12(1-\nu_c^2)\rho_c}{E_c}}, \hat{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.5.1 Đánh giá ảnh hưởng của các mô hình nghiên cứu

Ảnh hưởng của các mô hình nghiên cứu đến các ứng xử của tấm FGM tựa đơn với cấu trúc vật liệu phân bố theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM) được phân tích trong phần này. Các giá trị: chuyển vị lớn nhất, lực tới hạn, tần số dao động riêng lần lượt trình bày trong **Bảng 6.2**, **6.3** và **6.4** có xét đến sự thay đổi của tỉ số cạnh và chiều dày (a/h) và hệ số đặc trưng vật liệu (p) của tấm FGM. Bài toán tĩnh được tính toán với tải trọng phân bố đều, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSĐT) trong

chương 3 được áp dụng cho các mô hình Voigt, Reuss, Hashin LB, Hashin UB, LRVE, Tamura ($q_T = -100\text{GPa}$) và SCM.

Bảng 6.2: Giá trị chuyển vị (\bar{u}_3) của tấm FGM (loại A) hình vuông tựa đơn chịu tải phân bố đều

a/h	p	Voigt	Reuss	Hashin (LB)	Hashin (UB)	LRVE	Tamura	SCM
5	0	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523
	0.5	0.5259	0.7887	0.7293	0.6254	0.6710	0.6703	0.7094
	1	0.6766	0.9640	0.9060	0.7963	0.8524	0.8454	0.8883
	2	0.8752	1.1341	1.0823	0.9843	1.0336	1.0284	1.0661
	10	1.2431	1.4829	1.4336	1.3415	1.3838	1.3821	1.4117
10	∞	1.8613	1.8613	1.8613	1.8613	1.8613	1.8613	1.8613
	0	0.3079	0.3079	0.3079	0.3079	0.3079	0.3079	0.3079
	0.5	0.4642	0.6904	0.6405	0.5519	0.5923	0.5903	0.6150
	1	0.5983	0.8314	0.7857	0.6987	0.7451	0.7377	0.7623
	2	0.7654	0.9572	0.9176	0.8463	0.8808	0.8778	0.8968
100	10	1.0163	1.2367	1.1900	1.1045	1.1425	1.1419	1.1683
	∞	1.5952	1.5952	1.5952	1.5952	1.5952	1.5952	1.5952
	0	0.2932	0.2932	0.2932	0.2932	0.2932	0.2932	0.2932
	0.5	0.4438	0.6579	0.6112	0.5276	0.5662	0.5638	0.5838
	1	0.5725	0.7874	0.7459	0.6664	0.7095	0.7020	0.7205
100	2	0.7291	0.8986	0.8631	0.8006	0.8301	0.8279	0.8407
	10	0.9411	1.1551	1.1094	1.0260	1.0626	1.0623	1.0877
	∞	1.5071	1.5071	1.5071	1.5071	1.5071	1.5071	1.5071

Bảng 6.3: Giá trị lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) của tấm FGM (loại A) hình vuông tựa đơn ($R_1 = R_2 = -1$)

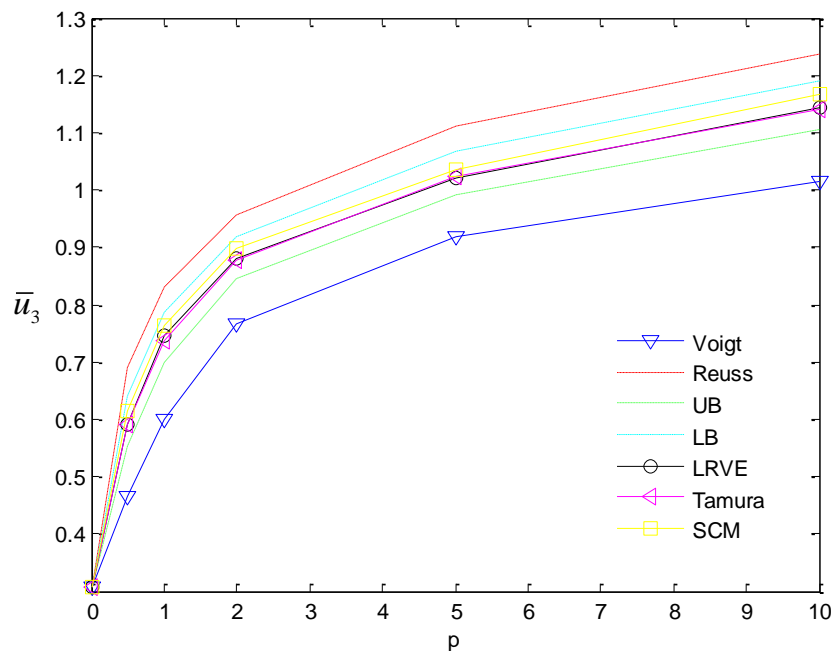
a/h	p	Voigt	Reuss	Hashin (LB)	Hashin (UB)	LRVE	Tamura	SCM
5	0	7.9204	7.9204	7.9204	7.9204	7.9204	7.9204	7.9204
	0.5	5.3057	3.5377	3.8258	4.4613	4.1579	4.1624	3.9330
	1	4.1238	2.8942	3.0796	3.5036	3.2731	3.3002	3.1409
	2	3.1879	2.4600	2.5779	2.8344	2.6994	2.7129	2.6171
	10	2.2445	1.8815	1.9462	2.0798	2.0162	2.0187	1.9763
10	∞	1.4990	1.4990	1.4990	1.4990	1.4990	1.4990	1.4990
	0	9.0615	9.0615	9.0615	9.0615	9.0615	9.0615	9.0615
	0.5	6.0102	4.0410	4.3557	5.0552	4.7107	4.7267	4.5366
	1	4.6629	3.3560	3.5509	3.9933	3.7447	3.7821	3.6601
	2	3.6451	2.9147	3.0405	3.2967	3.1678	3.1784	3.1112
100	10	2.7454	2.2560	2.3445	2.5260	2.4420	2.4433	2.3880
	∞	1.7490	1.7490	1.7490	1.7490	1.7490	1.7490	1.7490
	0	9.5150	9.5150	9.5150	9.5150	9.5150	9.5150	9.5150
	0.5	6.2863	4.2406	4.5650	5.2881	4.9275	4.9487	4.7794
	1	4.8736	3.5431	3.7405	4.1870	3.9322	3.9741	3.8721
100	2	3.8268	3.1048	3.2327	3.4849	3.3609	3.3699	3.3188
	10	2.9646	2.4153	2.5150	2.7193	2.6257	2.6264	2.5651
	∞	1.8513	1.8513	1.8513	1.8513	1.8513	1.8513	1.8513

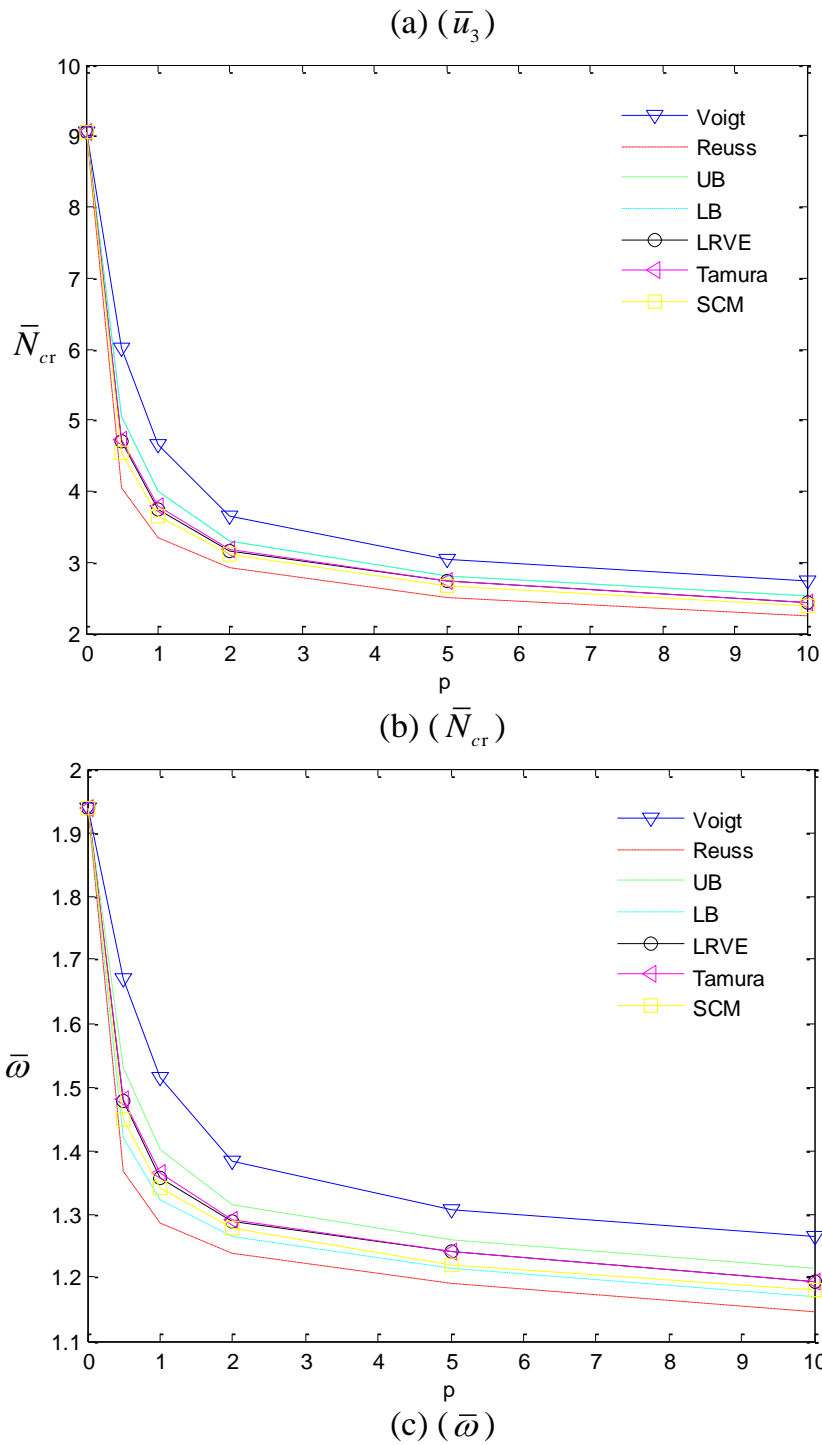
Bảng 6.4: Giá trị tần số ($\bar{\omega}$) của tấm FGM (loại A) hình vuông tựa đơn

a/h	p	Voigt	Reuss	Hashin (LB)	Hashin (UB)	LRVE	Tamura	SCM
5	0	1.7837	1.7837	1.7837	1.7837	1.7837	1.7837	1.7837
	0.5	1.5431	1.2584	1.3088	1.4139	1.3643	1.3654	1.3279
	1	1.4008	1.1745	1.2110	1.2909	1.2475	1.2532	1.2235
	2	1.2708	1.1203	1.1460	1.1998	1.1716	1.1747	1.1549

	10	1.1279	1.0335	1.0512	1.0865	1.0700	1.0706	1.0594
	∞	0.9415	0.9415	0.9415	0.9415	0.9415	0.9415	0.9415
10	0	1.9369	1.9369	1.9369	1.9369	1.9369	1.9369	1.9369
	0.5	1.6685	1.3673	1.4197	1.5298	1.4765	1.4791	1.4489
	1	1.5147	1.2848	1.3216	1.4015	1.3570	1.3639	1.3417
	2	1.3829	1.2373	1.2636	1.3153	1.2894	1.2917	1.2781
	10	1.2644	1.1468	1.1691	1.2133	1.1930	1.1934	1.1798
	∞	1.0314	1.0314	1.0314	1.0314	1.0314	1.0314	1.0314
100	0	1.9993	1.9993	1.9993	1.9993	1.9993	1.9993	1.9993
	0.5	1.7191	1.4119	1.4649	1.5767	1.5220	1.5253	1.4989
	1	1.5608	1.3308	1.3674	1.4467	1.4020	1.4094	1.3912
	2	1.4290	1.2872	1.3134	1.3637	1.3392	1.3410	1.3308
	10	1.3245	1.1955	1.2199	1.2685	1.2465	1.2467	1.2320
	∞	1.0687	1.0687	1.0687	1.0687	1.0687	1.0687	1.0687

Từ các kết quả có được, dễ dàng nhận thấy rằng giá trị chuyển vị (\bar{u}_3) theo mô hình Voigt là bé nhất so với các mô hình còn lại (ứng với $p = 0.5 \rightarrow 10$) và hoàn toàn ngược lại với các thành phần lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) và tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$). Trong trường hợp bài toán tấm dày: $a/h = 5$ với hệ số đặc trưng vật liệu: $p = 0.5$, thì mô hình Hashin (LB) và Hashin (UB) cho kết quả thành phần chuyển vị (\bar{u}_3) trong tấm lớn hơn so với mô hình Voigt là 39% và 19%, trong khi đó thành phần lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) lại nhỏ hơn lần lượt là 28% và 16%. Tương tự, thành phần giá trị tần số dao động ($\bar{\omega}$) cũng nhỏ hơn là 15% và 8%. Nếu so sánh thành phần chuyển vị (\bar{u}_3) của các mô hình Reuss, LRVE, Tamura và SCM so với mô hình Voigt thì có giá trị lần lượt: 50%, 28%, 27% và 35%. Để thấy rõ hơn sự khác biệt về ảnh hưởng của các mô hình vật liệu đối với ứng xử của kết cấu tấm loại thông qua **Hình 6.2**. Tương tự, trong các **Bảng 6.5**, **6.6** và **Hình 6.3**, **6.4** lần lượt so sánh sự khác biệt của các mô hình vật liệu đối với ứng xử kết cấu của tấm FG sandwich (loại B và C).

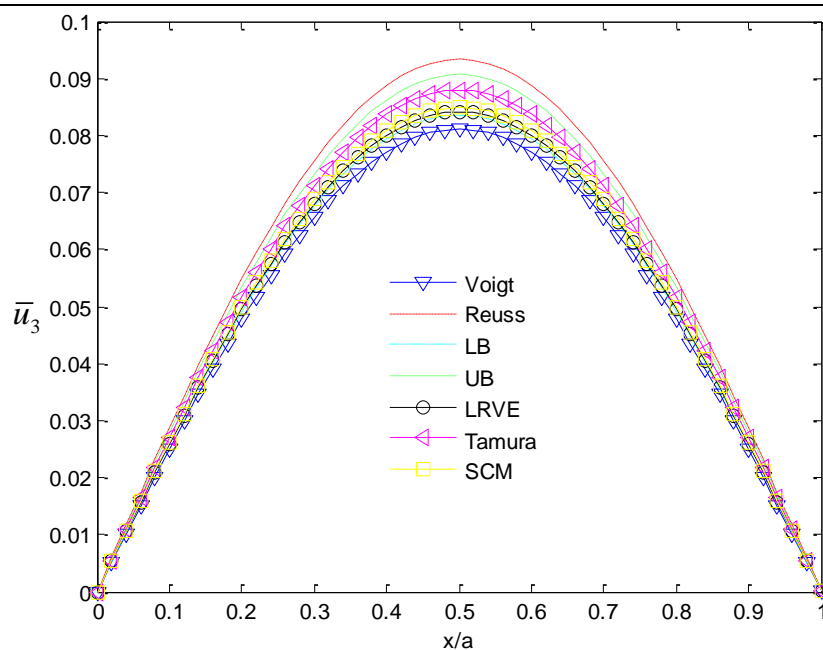




Hình 6.2: Ảnh hưởng của các mô hình đối với ứng xử của tấm FGM (loại A, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 10$)

Bảng 6.5: Giá trị lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) của tấm FG sandwich (loại B, Al/Al₂O₃, $R_1 = R_2 = -1$) hình vuông tựa đơn ($a/h = 100$)

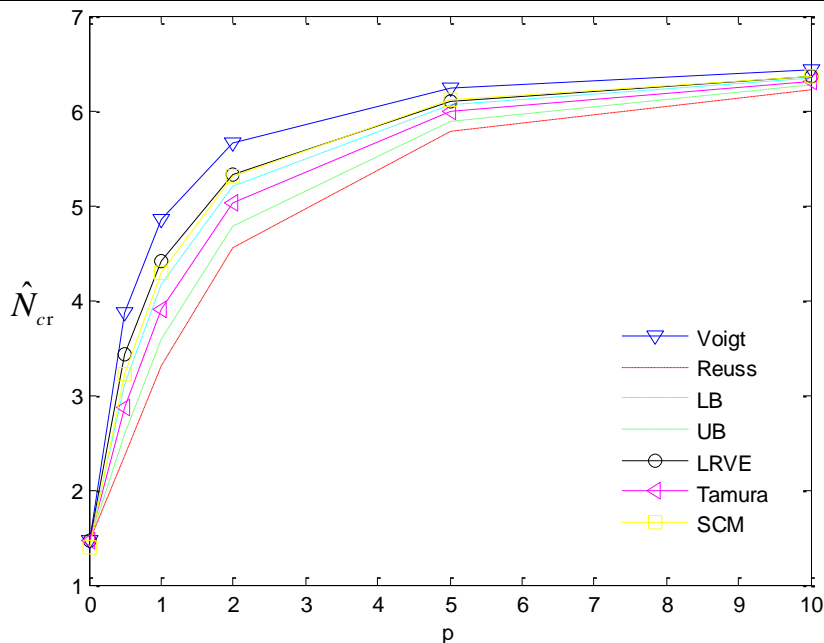
Mô hình	Cấu trúc	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=5$	$p=10$	∞
Voigt	1-1-1	2.4549	2.5980	2.6835	2.9331	3.0194	3.1488
Reuss	1-1-1	2.4549	2.4922	2.5283	2.7629	2.8952	3.1488
Hashin (LB)	1-1-1	2.4549	2.5375	2.6021	2.8586	2.9677	3.1488
Hashin (UB)	1-1-1	2.4549	2.5044	2.5498	2.7950	2.9203	3.1488
LRVE	1-1-1	2.4549	2.5668	2.6400	2.8861	2.9843	3.1488
Tamura	1-1-1	2.4549	2.5209	2.5768	2.8299	2.9466	3.1488
SCM	1-1-1	2.4549	2.5363	2.6082	2.8714	2.9774	3.1488
Voigt	1-2-1	2.4501	2.6666	2.8049	3.2451	3.4116	3.6825
Reuss	1-2-1	2.4501	2.5002	2.5525	2.9208	3.1634	3.6825
Hashin (LB)	1-2-1	2.4501	2.5704	2.6688	3.1014	3.3075	3.6825
Hashin (UB)	1-2-1	2.4501	2.5200	2.5856	2.9808	3.2130	3.6825
LRVE	1-2-1	2.4501	2.6170	2.7337	3.1571	3.3423	3.6825
Tamura	1-2-1	2.4501	2.5452	2.6281	3.0466	3.2654	3.6825
SCM	1-2-1	2.4501	2.5641	2.6753	3.1251	3.3267	3.6825
Voigt	2-2-1	2.4706	2.8573	3.0704	3.6382	3.8226	4.1046
Reuss	2-2-1	2.4706	2.5754	2.6857	3.2671	3.5603	4.1046
Hashin (LB)	2-2-1	2.4706	2.7016	2.8738	3.4779	3.7144	4.1046
Hashin (UB)	2-2-1	2.4706	2.6112	2.7419	3.3384	3.6137	4.1046
LRVE	2-2-1	2.4706	2.7765	2.9644	3.5361	3.7485	4.1046
Tamura	2-2-1	2.4706	2.6570	2.8107	3.4151	3.6695	4.1046
SCM	2-2-1	2.4706	2.7028	2.8912	3.5058	3.7346	4.1046



Hình 6.3: Ảnh hưởng của các mô hình đối với chuyển vị (\bar{u}_3) tấm FG sandwich (loại B, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($p = 10, a/h = 10$)

Bảng 6.6: Giá trị tần số ($\hat{\omega}$) của tấm FG sandwich (loại C, Al/Al₂O₃) hình vuông (lõi cứng, $a/h = 10$)

Cấu trúc	Mô hình	P					
		0	0.5	1	5	10	∞
1-0-1	Voigt	0.7670	1.4501	1.6790	2.0128	2.0649	2.1186
	Reuss	0.7670	1.1081	1.3869	1.9611	2.0483	2.1186
	Hashin (LB)	0.7670	1.2947	1.5602	1.9949	2.0591	2.1186
	Hashin (UB)	0.7670	1.1679	1.4469	1.9739	2.0524	2.1186
	LRVE	0.7670	1.3609	1.6016	1.9976	2.0599	2.1186
	Tamura	0.7670	1.2362	1.5099	1.9860	2.0562	2.1186
	SCM	0.7670	1.3264	1.5895	2.0007	2.0612	2.1186
1-1-1	Voigt	0.8394	1.4000	1.5924	1.8782	1.9251	1.9708
	Reuss	0.8394	1.0991	1.3221	1.8093	1.8948	1.9708
	Hashin (LB)	0.8394	1.2597	1.4794	1.8522	1.9136	1.9708
	Hashin (UB)	0.8394	1.1504	1.3761	1.8250	1.9017	1.9708
	LRVE	0.8394	1.3204	1.5209	1.8578	1.9159	1.9708
	Tamura	0.8394	1.2092	1.4335	1.8405	1.9085	1.9708
	SCM	0.8394	1.2818	1.5015	1.8582	1.9163	1.9708
1-2-1	Voigt	0.9624	1.4014	1.5643	1.8184	1.8628	1.9078
	Reuss	0.9624	1.1558	1.3286	1.7441	1.8267	1.9078
	Hashin (LB)	0.9624	1.2834	1.4628	1.7896	1.8488	1.9078
	Hashin (UB)	0.9624	1.1955	1.3738	1.7606	1.8347	1.9078
	LRVE	0.9624	1.3351	1.5012	1.7967	1.8520	1.9078
	Tamura	0.9624	1.2422	1.4229	1.7770	1.8427	1.9078
	SCM	0.9624	1.3007	1.4813	1.7958	1.8519	1.9078

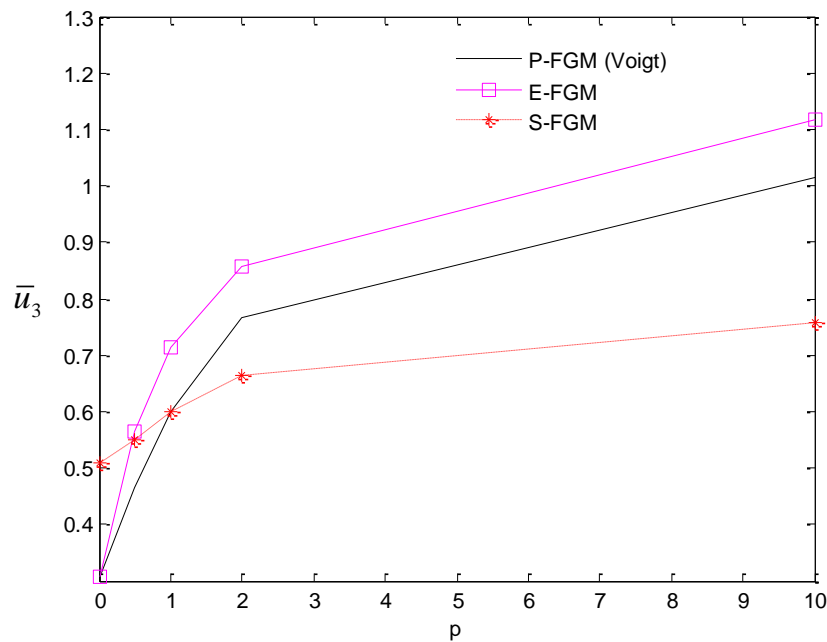


Hình 6.4: Ảnh hưởng của các mô hình đối với lực tới hạn (\hat{N}_{cr}) tấm (1-1-1) FG sandwich (loại C, Al/Al₂O₃) hình vuông tựa đơn ($a/h = 100$)

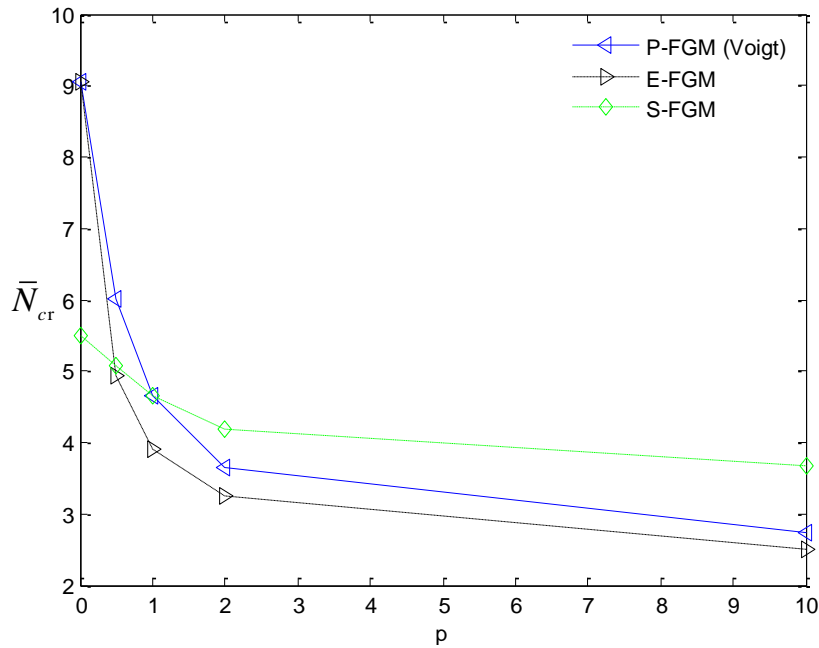
6.5.2 Đánh giá ảnh hưởng của các quy luật phân bố vật liệu

Trong phần này, để đánh giá mức độ ứng xử của tấm FGM thông thường (loại A) khi thay đổi các quy luật phân bố vật liệu (P-FGM, E-FGM và S-FGM) theo (6.1),

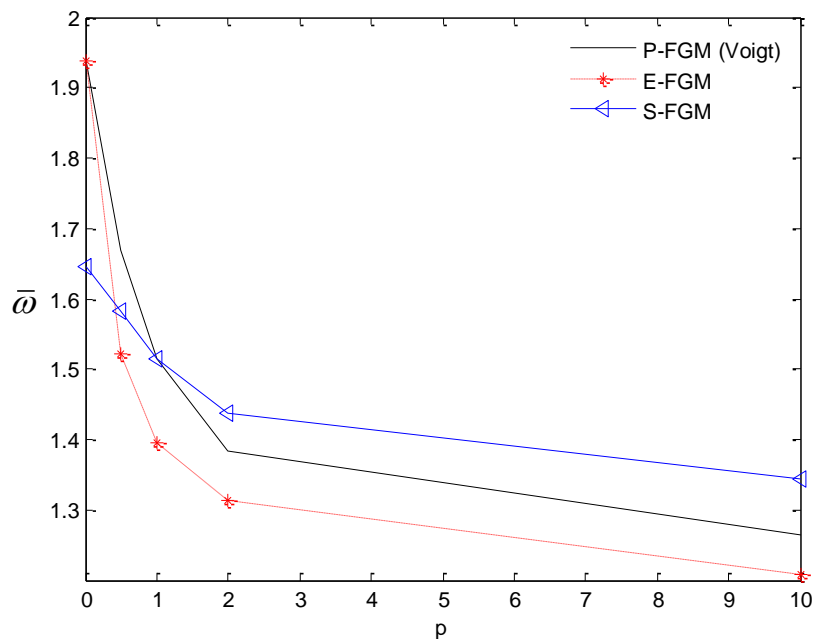
luận án cũng tiến hành phân tích các giá trị: \bar{u}_3 , \bar{N}_{cr} , và $\bar{\omega}$ tương tự như 6.5.1. Các kết quả phản ánh mức độ khác biệt được thể hiện trong Hình 6.5, 6.6 và 6.7 khi xét bài toán tấm FGM (loại A) hình vuông tựa đơn với tỉ số $a/h = 10$. Theo kết quả phân tích, ứng với hệ số đặc trưng vật liệu $p = 10$, thì quy luật E-FGM cho kết quả thành phần \bar{u}_3 trong tấm lớn hơn so với quy luật P-FGM là 10%, trong khi S-FGM so với P-FGM nhỏ hơn 25%. Trái ngược khi phân tích thành phần \bar{N}_{cr} thì có giá trị nhỏ hơn 9% và lớn hơn 34%, tương tự thành phần $\bar{\omega}$ lần lượt là nhỏ hơn 4% và lớn hơn 6%.



Hình 6.5: Đánh giá thành phần chuyển vị (\bar{u}_3) giữa các quy luật phân bố vật liệu tấm FGM (loại A, $a/h = 10$, $p = 10$)



Hình 6.6: Đánh giá thành phần lực tới hạn (\bar{N}_{cr}) giữa các quy luật phân bố vật liệu tấm FGM (loại A, $a/h = 10$, $p = 10$)



Hình 6.7: Đánh giá thành phần tần số dao động riêng ($\bar{\omega}$) giữa các quy luật phân bố vật liệu tấm FGM (loại A, $a/h = 10$, $p = 10$)

6.6 Kết luận

Chương này đã trình bày ứng xử của tấm FGM dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao mới mà luận án đã phát triển ở Chương 3. Một số mô hình hàm mật độ thể tích được áp dụng cho các giả thiết quy luật phân bố vật liệu (P-FGM, E-FGM và S-

FGM) để xác định các đặc tính hữu hiệu của tấm. Ảnh hưởng của các mô hình hàm mật độ thể tích (Voigt, Reuss, Hashin Shtrikman, Tamura, LRVE và SCM), tỉ số cạnh trên chiều dày tấm và hệ số đặc trưng vật liệu để xác định chuyển vị lớn nhất, lực tới hạn và tần số dao động riêng của tấm dựa trên lời giải giải tích đã được phân tích.

Kết quả nghiên cứu cho thấy có sự khác biệt đáng kể khi sử dụng các mô hình hàm mật độ thể tích khác nhau. Ví dụ: tồn tại sự chênh lệch đến 50% khi phân tích thành phần chuyển vị theo mô hình Reuss so với mô hình Voigt, cận Hashin-Shtrikman cho kết quả phù hơn khi khoảng cách giữa các cận nhỏ. Hiệu ứng phương pháp tính toán các đặc tính đồng nhất hóa vật liệu FGM cho thấy cần được kể đến trong phân tích ứng xử tấm FGM.

CHƯƠNG 7

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

7.1 Kết luận

Thông qua những gì đã đạt được trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án rút ra một số kết luận:

- Hướng nghiên cứu có nhiều ý nghĩa và được quan tâm bởi rất nhiều nhà khoa học trên thế giới. Đặc biệt là hàm biến dạng cắt bậc cao mà luận án phát triển đã được trích dẫn trên nhiều bài báo đăng trên các tạp chí quốc tế uy tín.
- Các nội dung mà luận án đã tập trung nghiên cứu:
 - Các ứng xử của tấm FGM, tấm composite FGM và tấm composite nhiều lớp.
 - Các quy luật phân bố vật liệu (P-FGM, E-FGM và S-FGM) và các mô hình xác định các đặc trưng hữu hiệu (Voigt, Reuss, Hashin-Shtrikman, Mori-Tanaka, Tamura, LRVE và SCM) của tấm FGM.
 - Áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích bài toán tấm có kể đến: hệ số điều chỉnh cắt cải tiến, mặt trung hòa vật lý, phương pháp giảm bớt số ẩn số của bài toán, ảnh hưởng nền đàn hồi. Dùng lời giải giải tích, lời giải số, xét hiện tượng khóa cắt... để phân tích bài toán tĩnh, lực tới hạn và tần số dao động tự do của kết cấu tấm.
 - Áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết Quasi-3D để phân tích bài toán tấm, trong đó phát triển hàm biến dạng cắt bậc cao mới, sử dụng nguyên lý biến phân Hamilton, nguyên lý Lagrange để thiết lập phương trình năng lượng. Sử dụng lời giải Navier, lời giải Ritz cho tấm chịu tải trọng tĩnh và tải trọng do nhiệt độ... để phân tích bài toán tĩnh, lực tới hạn và tần số dao động riêng của kết cấu tấm.
 - Phát triển PP PTHH bằng cách sử dụng phần tử MITC3 và có kể đến thành phần độ cong được làm trơn trên miền, trên cạnh và trên nút phần tử, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao... để phân tích bài toán tĩnh và tần số dao động riêng cho kết cấu tấm.
 - Phát triển bài toán phi tuyến hình học bằng cách sử dụng PP PTHH sử dụng phần tử MITC3 có kể đến thành phần độ cong được làm trơn trên miền, trên cạnh phần tử, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao kết hợp giải thuật lặp Newton – Raphson... để phân tích bài toán tĩnh cho kết cấu tấm.
 - Phân tích hiệu ứng các phương pháp đồng nhất hóa các đặc tính vật liệu FGM đến các đáp ứng của tấm.

-
- Các hiệu ứng về sự thay đổi tỉ số cạnh trên cạnh, tỉ số cạnh trên chiều dày tấm, hệ số đặc trưng vật liệu không đồng nhất, hệ số nền, cấu trúc phân lớp vật liệu... đều xuất hiện trong hầu hết các kết quả phân tích.
 - Các kết quả đạt được có độ chính xác cao, đáng tin cậy và có thể sử dụng để làm tài liệu cho các nghiên cứu sau này.

7.2 Kiến nghị

Trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án cũng gặp một số khó khăn và hạn chế nhất định. Vì vậy, một số vấn đề tồn tại trong luận án sẽ được phát triển trong thời gian sắp tới:

- Dùng lời giải Lévy để phân tích ứng xử cho kết cấu tấm FGM với điều kiện biên khác nhau.
- Phát triển PP PTHH C^1 cho lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.
- Phân tích thành phần lực tới hạn và dao động tự do cho bài toán tấm FGM sử dụng lý thuyết phi tuyến hình học với hàm biến dạng cắt bậc cao của luận án kết hợp các phương pháp làm trơn.
- Phát triển PP PTHH hiện tại cho mô hình tấm vì cấu trúc sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ kết hợp lý thuyết hiệu chỉnh ứng suất.
- Phát triển phương pháp số cho mô hình rời rạc tính toán các đặc tính hữu hiệu tấm FGM.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] T. K. Nguyen. Some methods for estimating effective elastic properties of heterogeneous plates. PhD thesis, University of Paris-Est, France (2008).
- [2] A. H. Akbarzadeh, A. Abedini, Z.T. Chen. Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates. *Composite Structures* 119 (2015) 598-609.
- [3] R. Hill. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proceeding of the Physical Society* 65 (1952) 349-354.
- [4] L. Mishnaevsky Jr. *Computational mesomechanics of composites*. John Wiley & Sons, England (2007).
- [5] R. W. Zimmerman, Behavior of the Poisson ratio of a two-phase composite material in the high-concentration limit. *Applied Mechanics Reviews* 47 (1) (1994) 38-44.
- [6] Z. Hashin, S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962) 335-342.
- [7] J. Segurado, C. González, J. Llorca. A numerical investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites. *Acta Mater* 51 (2003) 2355–2369.
- [8] Y. Benveniste. A new approach to the application of Mori–Tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6 (1987) 147-157.
- [9] H. Tan, Y. Huang, C. Liu, P.H. Geubelle. The Mori–Tanaka method for composite materials with nonlinear interface debonding. *International Journal of Plasticity* 21 (2005) 1890–1918.
- [10] J. H. Kim, G. H. Paulino. An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003) 1457-1497.
- [11] D. K. Jha, T. Kant, R. K. Singh. A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures* 96 (2013) 833-849.
- [12] M. Gasik, K. Lilius, Evaluation of properties of W-Cu functional gradient materials by micromechanical model. *Computational Materials Science* 3 (1994) 41-49.
- [13] M. M. Gasik. Micromechanical modelling of functionally graded materials. *Computational Materials Science* 13 (1998) 42-55.
- [14] M. Ashjari and M. R. Khoshravan. Mass optimization of functionally graded plate for mechanical loading in the presence of deflection and stress constraints. *Composite Structures* 110 (2014) 118-132.
- [15] T. N. Alshabatat, T. K. Myers, K. Naghshineh. Design of in-plane functionally graded material plates for optimal vibration performance. *Noise Control Engineering Journal* 64 (2) (2016) 268-278 (11).
- [16] H. Mozafaria , A. Ayoba , F. Kamali. Optimization of Functional Graded

-
- Plates for Buckling Load by using Imperialist Competitive Algorithm. *Procedia Technology* 1 (2012) 144 – 152.
- [17] S. H. Chi, Y. L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 3657-3674.
- [18] F. Delale, F. Erdogan. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983) 637-640.
- [19] J. L. Mantari, C. Guedes Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 94 (2012) 1991-2000.
- [20] S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells* (1959), McGraw-Hill, New York.
- [21] J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells*. CRC Press, 2nd Ed. USA (2004).
- [22] J. N Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates* (1999). Taylor Francis, Philadelphia.
- [23] J. N. Reddy, C.M. Wang. An overview of the relationships between solutions of classical and shear deformation plate theories. *Composites Science and Technology* 60 (2000) 2327-2335.
- [24] X. Q. He, T. Y. Ng, S. Sivashankera, K. M. Liew. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International journal of solids and structures* 38 (2001) 1641-1655.
- [25] S. H. Chi, Y. L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - Part I: Analysis. *International journal of solids and structures* 43 (2006) 3657–3674.
- [26] S. H. Chi, Y. L. Chung. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - Part II: Numerical results. *International journal of solids and structures* 43 (2006) 3675–3691.
- [27] S. Srinivas, A. K. Rao. Bending, Vibration and Buckling of Simply-Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates. *International journal of solids and structures* 6 (11) (1970) 1463–1481.
- [28] G. N. Praveen, J. N. Reddy. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramicmetal plates. *Journal of Solids and Structures* 35 (1998) 4457–4476.
- [29] Y. Oatao, Y. Tanigawa. Three-dimensional transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to partial heating. *Journal of Thermal Stresses* 22 (1999) 35-55.
- [30] Q. Li, V. P. Iu và K. P. Kou. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009) 733-750.
- [31] R. C. Batra, J. Jin. Natural frequencies of a Functionally Graded Rectangular Plate. *Journal of Sound and Vibration* 204 (2004) 612-638.
- [32] T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. Shear correction factors for functionally
-

-
- graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 14 (8) (2007) 567-575.
- [33] T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures* 83 (2008) 25–36.
- [34] T. K. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composite Part B: Engineering* 55 (2013) 147-157.
- [35] T. K. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates with improved transverse shear stiffness based on the first-order shear deformation theory. *Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 228 (12) (2014) 2110-2131.
- [36] M. Singha, T. Prakash và M. Ganapathi. Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elements in Analysis and Design* 47 (4) (2011) 453 – 460.
- [37] L. S. Ma, D. W. Lee. A Further Discussion of Nonlinear Mechanical Behavior for FGM Beams under In-plane Thermal Loading. *Composite Structures* 93 (2011) 831-842.
- [38] D. G. Zhang, Y.-H. Zhou. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Computational Materials Science* 44 (2) (2008) 716 – 720.
- [39] D. G. Zhang. Modeling and analysis of FGM rectangular plates based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 68 (2013) 92 – 104.
- [40] M. K. Singha, T. Prakash and M. Ganapathi. Nonlinear Oscillation of FGM plates under Aerodynamic Load. *Proceedings of the World Congress on Engineering* 2 (2010) 958-966.
- [41] T. L. Wu, K. K. Shukla, J. H. Huang. Nonlinear static and dynamic analysis of functionally graded plates. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering* 11 (2006) 679-698.
- [42] M. Latifi, F. Farhatnia, M. Kadkhodaei. Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion. *European Journal of Mechanics A/Solids* 41 (2013) 16-27.
- [43] G. Srinivas, U. S. Prasad. Simulation of Traditional Composites Under Mechanical Loads. *International Journal of Systems , Algorithms & Applications* 2 (2012) 2277-2677.
- [44] A. Naderi, A.R. Saidi. On pre-buckling configuration of functionally graded Mindlin rectangular plates. *Mechanics Research Communications* 37 (2010) 535–538.
- [45] T. Prakash, M. K. Singha, M. Ganapathi. Thermal snapping of functionally graded materials plates. *Materials and Design* 30 (2009) 4532–4536.
- [46] Y. H. Lee, S. I. Bae, J. H. Kim. Thermal buckling behavior of functionally graded plates based on neutral surface. *Composite Structures* 137 (2016) 208–
-

- [47] J. N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984) 745-752.
- [48] J. N. Reddy. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000) 663–684.
- [49] J. N. Reddy. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures* (2011), 1, 1-21.
- [50] A. M. Zenkour, D. S. Mashat. Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates. *Natural Science* 2 (2010) 968-978.
- [51] A. M. Zenkour, M. Sobhy. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures* 93 (2010) 93–102.
- [52] A. M. Zenkour, M. Sobhy. Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Resting On Elastic Foundations Using the Trigonometric Theory. *Journal of Thermal Stresses* 34 (2011) 1119-1138.
- [53] B. A. S. Shariat, M.R. Eslami. Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures* 78 (2007) 433–439.
- [54] Y. H. Dong, Y.H. Li. A unified nonlinear analytical solution of bending, buckling and vibration for the temperature-dependent FG rectangular plates subjected to thermal load. *Composite Structures* 159 (2017) 689–70.
- [55] Loc V. Tran, Chien H. Thai, H. Nguyen-Xuan. An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 73 (2013) 65–76.
- [56] G. Shi. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 4399–4417.
- [57] C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, R. M. N. Jorge. A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory. *Journal of Sound and Vibration* 300 (2007) 1048–1070.
- [58] Y. M. Ghugal, A. S. Sayyad. A Static Flexure of Thick Isotropic Plates Using Trigonometric Shear Deformation Theory. *Journal of Solid Mechanics* 2 (1) (2010) 79-90.
- [59] I. Mechab, H. A. Atmane, A. Tounsi, H. A. Belhadj, El Abbas Adda Bedia. A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates. *Acta Mechanica Sinica* 26 (2010) 941–949.
- [60] J. S. Kumar, B. S. Reddy, C. E. Reddy, K. V. K. Reddy. Geometrically non linear analysis of functionally graded material plates using higher order theory. *International Journal of Engineering, Science and Technology* 3 (2011) 279-288.
- [61] K. P. Soldatos. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica* 94 (1992)195–220.
- [62] F. Z. Kettaf, M.S.A. Houari, M. Benguediab and A. Tounsi. Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model. *Steel and Composite Structures*, Vol. 15, No. 4 (2013) 399-423.

-
- [63] S. S. Akavci. Thermal buckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation according to a hyperbolic shear deformation theory. *Mechanics of Composite Materials* 50 (2) 279-298.
- [64] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science* 29 (8) (1991) 745-752.
- [65] H. T. Thai, T. P. Vo. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 3269–3281.
- [66] M. Karama. Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Acta Mechanica* 40 (2003) 1525–1546.
- [67] J. L. Mantari, A. S. Oktem, G. C. Soares. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 94 (2012) 714–723.
- [68] J. L. Mantari, A. S. Oktem, G. C. Soares. Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher order shear deformation theory. *Composites: Part B* 43 (8) (2012) 3348-3360.
- [69] S. Xiang, G. W. Kang. A n th-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *European Journal of Mechanics A/Solids* 37 (2013) 336–343.
- [70] C. H. Thai, A. Ferreira, S. P. A. Bordas, H. Nguyen-Xuan. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids* 43 (2014) 89–108.
- [71] N. Grover, D.K. Maiti, B.N. Singh. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures* 95 (2013) 667–675.
- [72] M. S. A. Hoauri. A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates. *International Journal of Computational Methods* 11 (2014) 135-182.
- [73] E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, M. Soares. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites: Part B* 42 (2011) 123–133.
- [74] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 94 (2012) 1814–1825.
- [75] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *European Journal of Mechanics – A/Solids* 37 (2013) 24–34.
- [76] H. T. Thai, S. E. Kim. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation
-

-
- theory for functionally graded plates. *Composite Structures* 99 (2013) 172–180.
- [77] H. T. Thai, T. P. Vo, T. Bui, T. K. Nguyen. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mechanica*, 225 (3) (2014) 951-964.
- [78] T. P. Vo, H. T. Thai, T. K. Nguyen, F. Inam, J. Lee. Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory. *Composites Part B: Engineering* 68 (2014) 59-74.
- [79] J. L. Mantari, C. G. Soares. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Composites: Part B* 45 (2013) 268–281.
- [80] J. L. Mantari, C. G. Soares. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Composite Structures* 94 (2012) 2561–2575.
- [81] A. H. Baferani, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh. An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 225 (2011) 526-536.
- [82] H. T. Thai, S. E. Kim. Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Composite Structures* 93 (2011) 1738-1746.
- [83] H. T. Thai, S. E. Kim. Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates. *International Journal of Mechanical Sciences* 54 (2012) 269-276.
- [84] H. T. Thai, S. E. Kim. Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 3870–3882.
- [85] S. Guenfoud, S.V. Bosakov, D.F. Laefer. A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space. *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010) 1822–1829.
- [86] R. Ansari, S. Sahmani, H. Rouhi. Rayleigh–Ritz axial buckling analysis of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions. *Physics Letters A* 375 (2011) 1255–1263.
- [87] L. Dozio. Refined 2-D theories for free vibration analysis of annular plates: Unified Ritz formulation and numerical assessment. *Computers and Structures* 147 (2015) 250–258.
- [88] E. A. Shahrabaki, A. Alibeigloo. Three-dimensional free vibration of carbon nanotube-reinforced composite plates with various boundary conditions using Ritz method. *Composite Structures* 111 (2014) 362–370.
- [89] A. M. Zenkour, M. Sobhy. Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium. *Physica E* 56 (2013) 251-259.
- [90] M. Sobhy. Thermomechanical bending and free vibration of single-layered graphene sheets embedded in an elastic medium, *Physica E* 56 (2014) 400-409.
-

-
- [91] M. Sobhy. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures* 99 (2013) 76-87.
- [92] T. K. Nguyen, T. T. P. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites: Part B* 76 (2015) 273-285.
- [93] T. K. Nguyen, N. D. Nguyen, T. P. Vo, H. T. Thai. Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams. *Composite Structures* 160 (2016) 142–151.
- [94] H. T. Thai, T. K. Nguyen, T. P. Vo, J. Lee. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics A/Solids* 45 (2014) 211–225.
- [95] G. R. Bhashyam, R. H. Gallagher. An approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate bending analysis. *Computers & Structures* 19 (1984) 35-40.
- [96] A. Tessler and T. J. R Hughes. A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 50 (1985) 71–101.
- [97] J. H. Kim, Y. H. Kim. A three-node C^0 ANS element for geometrically nonlinear structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002) 4035–4059.
- [98] U. Andelfinger and E. Ramm. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993) 1311–1337.
- [99] C. Polat. An assessment of a co-rotational EAS brick element. *Latin American Journal of Solids and Structures* 7 (2010) 77 – 89.
- [100] K. U. Bletzinger, M. Bischoff and E. Ramm. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures* 75 (2000) 321–334.
- [101] Y. Chai, W. Li, G. Liu, Z. Gong, T. Li. A superconvergent alpha finite element method (S α FEM) for static and free vibration analysis of shell structures. *Computers and Structures* 179 (2017) 27-47.
- [102] K. J. Bathe, F. Brezzi. A simplified analysis of two plate bending elements – the MITC4 and MITC9 elements. *International Proceedings of numerical methods in engineering: theory and applications*. University College Swansea, Wales (1987).
- [103] P. S. Lee and K. J. Bathe. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures* 82 (2004) 945–962.
- [104] Y. Lee, P. S. Lee, K. J. Bathe. The MITC3+ shell element and its performance. *Computers & Structures* 138 (2014) 12–23.
- [105] H. M. Jeon, P. S. Lee, K. J. Bathe. The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers. *Computers and Structures* 134 (2014) 128–142.
-

-
- [106] H. M. Jeon, Y. Lee, P. S. Lee, K. J. Bathe. The MITC3+ shell element in geometric nonlinear analysis. *Computers and Structures* 146 (2015) 91–104.
- [107] K. J. Bathe, P. S. Lee, J. K. Hiller. Towards improving the MITC9 shell element. *Computers & Structures* 81 (2003) 477–89.
- [108] K. J. Bathe, P. S. Lee. The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending. *Advances in Engineering Software* 41 (2010) 712–728.
- [109] G. R. Liu, Nguyen-Thoi T. *Smoothed Finite Element Methods*. CRC Press (2010).
- [110] Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, K. Y. Dai, K. Y. Lam. Selective smoothed finite element method. *Tsinghua Science & Technology* 12 (5) (2007) 497–508.
- [111] G. R. Liu, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, K. Y. Dai, K. Y. Lam. On the essence and the evaluation of the shape functions for the smoothed finite element method (sfem), (letter to editor). *International Journal for numerical methods in engineering* 77 (2009) 1863–1869.
- [112] G. R. Liu, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: properties, accuracy and convergence rates. *International Journal for numerical methods in engineering* 84 (2010) 1222–1256.
- [113] Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, K. Y. Dai, K. Y. Lam. Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM). *International Journal for numerical methods in engineering* 71 (2007) 902–930.
- [114] Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A stabilized smoothed finite element method for free vibration analysis of Mindlin–Reissner plates. *International Journal Numerical Methods Biomedical Engineering* 25 (2009) 882–906.
- [115] X. Y. Cui, G. R. Li, G. Y. Li, X. Zhao, Nguyen-Thoi T, G. Y. Sun. A smoothed finite element method (SFEM) for linear and geometrically nonlinear analysis of plates and shells. *Computer Modeling in Engineering & Sciences* 28 (2008) 109–125.
- [116] A. J. M. Ferreira, R. C. Batra, C. M. C. Roque, L. F. Qian, G. M. N. Jorge. Natural frequencies of functionally graded plates by a mesh-less method. *Composite Structures* 75 (2006) 593–600.
- [117] D. F. Gilhooley, R. C. Batra, J. R. Xiao, M. A. McCarthy, J. W. Gillespie. Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Composite Structures* 80 (2007) 539–552.
- [118] X. L. Chen, Z. Y. Zhao, K. M. Liew. Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage. *Advances in Engineering Software* 39 (2) (2008) 121–131.
- [119] Y. Y. Lee, X. Zhao, K. M. Liew. Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Smart Materials and Structures* 18 (2009):035007. doi:10.1088/0964-1726/18/3/035007.
- [120] X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sound and*
-

-
- Vibration 319 (2009) 918–939.
- [121] X. Zhao, K. M. Liew. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (33-36) (2009) 2796–2811.
- [122] K. M. Liew, X. Zhao, A. J. M. Ferreira. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures* 93 (8) (2011) 2031–2041.
- [123] Loc V. Tran, Chien H. Thai, , H. Nguyen-Xuan, An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 73 (2013) 65–76.
- [124] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194 (39–41) (2005) 4135–4195.
- [125] Loc V. Tran, A.J.M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory, *Composites Part B* 51 (2013) 368–383.
- [126] S. Amir Farzam-Rad, Behrooz Hassani, Abbas Karamodin, Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface, *Composites Part B* 10.1016/j.compositesb.2016.09.029 (2017).
- [127] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Computers & Structures*, 141 (2014) 94-112.
- [128] M ED Thai CH, Zenkour AM, Abdel-Wahab M, Nguyen-Xuan H. A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Composite* 2016;139:77–95.
- [129] M. Sobhy. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures* 99 (2013), 76 – 87.
- [130] H. T. Thai, S. E. Kim. A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 96 (2013) 165–173.
- [131] M. Mohammadi, A. R. Saidi, E. Jomehzadeh. A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 224 (2010) 1831–1841.
- [132] A. M. Zenkour. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005) 5243–5258.
- [133] N. E. Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E. A. Adda.Bedia. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally
-

-
- graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences* 53 (4) (2011) 237 – 247.
- [134] A. Neves, A. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, R. Jorge, C. Soares. Buckling analysis of sandwich plates with functionally graded skins using a new quasi-3D hyperbolic sine shear deformation theory and collocation with radial basis functions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 92 (2012) 749–766.
- [135] S. H. Hashemi, H. R. D. Taher, H. Akhavan, and M. Omid. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 1276–1291.
- [136] S. Natarajan, G. Manickam. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design* 57 (2012) 32 – 42.
- [137] A. Bessaim, M. S. Houari, A. Tounsi, S. Mahmoud, E. A. Adda Bedia. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 15 (2013) 671–703.
- [138] Q. Li, V. P. Iu, K. P. Kou. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration* 311 (2008) 498–515.
- [139] A. M. Zenkour. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Archive of Applied Mechanics* 77 (2007) 197-214.
- [140] M. Sobhy. An accurate shear deformation theory for vibration and buckling of FGM sandwich plates in hygrothermal environment. *Composite Structures* 110 (2016) 62-77.
- [141] A. Mahi, E. A. Bedia, A. Tounsi. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling* 39 (2015) 2489–2508.
- [142] M. S. Houari, A. Tounsi, O. Anwar Bég. Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences* 76 (2013) 102–111.
- [143] E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* (1) (2008) 194 – 203.
- [144] C. P. Wu, K. H. Chiu. RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates. *Composite Structures* 93 (5) (2011) 1433 – 1448.
- [145] A. M. Zenkour. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling* 30 (2006) 67–84.
- [146] J. L. Mantari, C. M. M. Soares. Bending analysis of thick exponentially
-

-
- graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures* 94 (2012) 1991-2000.
- [147] J. L. Mantari, C. M. M. Soares. Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates. *Composite Structures* 109 (2014) 231-239.
- [148] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Composites Part B: Engineering* 44 (2013) 657-674.
- [149] S. Brischetto. Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 4 (2009) 13-33.
- [150] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, C. M. C. Roque, M. Cinefra, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composites Part B: Engineering* 43 (2012) 711-725.
- [151] A. M. Zenkour. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four unknown shear and normal deformations theory. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 15 (2013) 629-656.
- [152] H. T. Thai, D. H. Choi. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 36 (2012) 1008-1022.
- [153] Nguyen-Xuan H, Tran-Vinh L, Nguyen-Thoi T, Vu-Do HC. Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. *Composite Structures* 93 (11) (2011) 3019-3039.
- [154] F. A. Fazzolari, E. Carrera. Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions. *Journal of Thermal Stresses* 37 (2014) 1449-1481.
- [155] X. Zhao, Y. Y. Lee, K. M. Liew. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 90 (2009) 161-171.
- [156] B. Uymaz, M. Aydogdu. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26 (18) (2007) 1847-1863.
- [157] G. Jin, Z. Su, S. Shi, T. Ye, S. Gao. Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures* 108 (2014) 565-577.
- [158] A. H. Baferani, A. H. Saidi, H. Ehteshami. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. *Composite Structures* 93(7) (2011) 1842-1853.
- [159] S. S. Vel, R. C. Batra. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 272 (2004) 703-730.
-

-
- [160] L. F. Qian, R. C. Batra, L. M. Chen. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plate by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method. *Composites: Part B* 35 (2004) 685–697.
- [161] Chau-Dinh T, G. Zi, P. S. Lee, T. Rabczuk, J. H. Song. Phantom-node method for shell models with arbitrary cracks. *Composite Structures* 9293 (2012) 242-256.
- [162] Y. Lee, K. Yoon, P. S. Lee. Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger-Reissner principle. *Composite Structures* 110111 (2012) 93-106.
- [163] J. Kim, K. J. Bathe. The finite element method enriched by interpolation covers. *Composite Structures* 116 (2013) 35–49.
- [164] E. N. Dvorkin, K. J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1 (1984) 77–88.
- [165] K. J. Bathe, E. N. Dvorkin. A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22 (1986) 697–722.
- [166] M. L. Bucelem, K. J. Bathe. Higher-order MITC general shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (21) (1993) 3729-3754.
- [167] G. Liu, Nguyen-Thoi T. *Smoothed finite element methods*. Taylor & Francis; 2010. <https://books.google.ca/books?id/49TdHtwAACAAJ>.
- [168] G. R. Liu, K. Y. Dai, Nguyen-Thoi T. A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics* 39 (6) (2007) 859–877.
- [169] C. Shankara, N. Iyengar. A C^0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibration* 191(5) (1996) 721-738.
- [170] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, Q. Lieu-Xuan. Cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) based on the C^0 type higher-order shear deformation for geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates. *Computational Materials Science* 96 (2015) 549–558.
- [171] P. S. Lee and K. J. Bathe. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers and Structures* 82 (2004) 945–962.
- [172] Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H, Le-Van C. Free and forced vibration analysis using the n-sided polygonal cell-based smoothed finite element method (nCS-FEM). *International Journal for numerical methods in engineering* 10 (1) (2013) 1340008.
- [173] Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Thai-Hoang C. A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates. *International Journal for numerical methods in engineering* 91 (7) (2012) 705–741.
-

-
- [174] Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Ngo-Thanh P. Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements. *Computers & Structures* 125 (2013) 100–113.
- [175] Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Thai-Hoang C, Nguyen-Xuan H. A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) using triangular elements for static and free vibration analyses of shell structures. *International Journal of Mechanical Sciences* 74 (2013) 32–45.
- [176] Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Loc Tran V, Nguyen-Xuan H. A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) based on the C^0 -type higher-order shear deformation theory for static and free vibration analyses of functionally graded plates. *Computational Materials Science* 79 (2013) 857–872.
- [177] Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Le-Dinh T, Nguyen-Xuan H. Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3). *Smart Materials and Structures* 22 (2013) 095026.
- [178] Nguyen-Thoi T, P. Phung-Van, H. Luong-Van, H. Nguyen-Van, H. Nguyen-Xuan. A cell based smoothed three node Mindlin plate element (CS-MIN3) for static and free vibration analyses of plates. *Computational Mechanics* 51 (2013) 65–81.
- [179] Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, Nguyen-Xuan H. An n-sided polygonal edge-based smoothed finite element method (nES-FEM) for solid mechanics. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 27 (9) (2011) 1446–1472.
- [180] Nguyen-Xuan H, Liu GR, Thai-Hoang C, Nguyen-Thoi T. An edge-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2009) 471–489.
- [181] Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Hoang S, Nguyen-Xuan H. An edge-based smoothed three-node Mindlin plate element (ES-MIN3) for static and free vibration analyses of plates. *The KSCE Journal of Civil Engineering* 2013 (in press).
- [182] Phan-Dao H, Nguyen-Xuan H, Thai-Hoang C, Nguyen-Thoi T, Rabczuk T. An edge-based smoothed finite element method for analysis of laminated composite plates. *International Journal of Computational Methods* 10 (1) (2013) 1340005.
- [183] Nguyen-Xuan H, G. R. Liu, S. P. A. Bordas, S. Natarajan, T. Rabczuk. An adaptive singular ES-FEM for mechanics problems with singular field of arbitrary order. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 253 (2013) 252–273.
- [184] Nguyen-Thoi T, G. R. Liu, Vu-Do HC, Nguyen-Xuan H. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for visco-elastoplastic analyses of 2D solids using triangular mesh. *Computational Mechanics* 45 (2009) 23–44.
-

-
- [185] Thanh Tran Ngoc, G. R. Liu, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. An edge-based smoothed finite element method for primal-dual shakedown analysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 82 (7) (2010) 917–938.
- [186] Canh Le V, Nguyen-Xuan H, H. Askes, T. Rabczuk, Nguyen-Thoi T. Computation of limit load using edge-based smoothed finite element method and secondorder cone programming. *International Journal of Computational Methods* 10 (1) (2013) 1340004.
- [187] Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H, Le-Van C. An application of the ES-FEM in solid domain for dynamic analysis of 2D fluid-solid interaction problems. *International Journal of Computational Methods* 10 (1) (2013) 1340003.
- [188] G. R. Liu, Nguyen-Thoi T, K. Y. Lam. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static and dynamic problems of solid mechanics. *Journal of Sound and Vibration* 320 (2008) 1100–1130.
- [189] Nguyen-Thoi T, Liu GR, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Tran C. Adaptive analysis using the node-based smoothed finite element method (NS-FEM). *Communications in Numerical Methods in Engineering* 27 (1) (2011) 198–218.
- [190] Nguyen-Thoi T, Liu GR, Nguyen-Xuan H. Additional properties of the nodebased smoothed finite element method (NS-FEM) for solid mechanics problems. *International Journal of Computational Methods* 6 (4) (2009) 633–666.
- [191] G. R. Liu, L. Chen, Nguyen-Thoi T, K. Zeng, G. Y. Zhang. A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (11) (2010) 1466–1497.
- [192] Nguyen-Thoi T, Vu-Do HC, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010) 3005–3027.
- [193] Nguyen-Xuan H, T. Rabczuk, Nguyen-Thoi T, Tran TN, Nguyen-Thanh N. Computation of limit and shakedown loads using a node-based smoothed finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90 (3) (2012) 287–310.
- [194] G. R. Liu, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, K. Y. Lam. A node-based smoothed finite element method (ns-fem) for upper bound solutions to solid mechanics problems. *Composite Structures* 87 (12) (2009) 14-26.
- [195] Nguyen-Xuan H, T. Rabczuk, S. Bordas, J. Debongnie. A smoothed finite element method for plate analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (1316) (2008) 1184-1203.
- [196] R. L. Taylor, F. Auricchio. Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements: Part IIa simple triangle. *International Journal for Numerical Methods*
-

-
- in Engineering 36 (18) (1993) 3057-3066.
- [197] C. P. Wu, K. H. Chiu, Y. M. Wang. RMVT-based meshless collocation and elementfree galerkin methods for the quasi-3d analysis of multilayered composite and {FGM} plates. *Composite Structures* 93 (2) (2011) 923-943.
- [198] T. K. Nguyen, H. T. Thai, T. P. Vo. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures, An International Journal* 18(1) (2015) 91-120.
- [199] J. N. Reddy. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.
- [200] M. A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Essentials (1)*, John Wiley & Sons, New York (1991).
- [201] V. R. Kar, S. K. Panda. Nonlinear thermomechanical deformation behaviour of P-FGM shallow spherical shell panel. *Chinese Journal of Aeronautics* 29(1) (2016) 173–183.
- [202] J. Yang, H. S. Shen. Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites: Part B* 34 (2003) 103–115.
- [203] H. Nguyen-Van. Development and application of assumed stain smoothing finite element technique for composite plate/shell. PhD thesis, University of Southern Queensland (2000).
- [204] H. Nguyen-Van, N. Nguyen-Hoai, T. Chau-Dinh, T. Nguyen-Thoi. Geometrically nonlinear analysis of composite plates and shells via a quadrilateral element with good coarse-mesh accuracy. *Composite Structures* 112 (2014) 327–338.
- [205] Y. X. Zhang, K. S. Kim. Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements. *Composite Structures* 72 (2006) 301–310.
- [206] N. S. Putcha, J. N. Reddy. A refined mixed shear flexible finite element for nonlinear analysis of laminated plates, *Composite Structures* 22 (1986) 529–38.
- [207] T. Kant, J. R. Kommineni. C^0 finite element geometrically non-linear analysis of fibre reinforced composite and sandwich laminates based on a higher-order theory. *Composite Structures* 45 (1992) 511–520.
- [208] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965) 213-222.
- [209] T. Reiter, G. J. Dvorak. Micromechanical models for graded composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997) 1281-1302.
- [210] S. S. Vel, R. C. Batra. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* 40 (2002) 1421-1433.
- [211] S. Suresh, A. Mortensen. *Fundamentals of functionally graded materials: Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*. Press, Cambridge (1998).
-

-
- [212] J. Aboudi, M. J. Pindera, S. M. Arnold. Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B: Engineering* 30 (1999) 777-832.
- [213] J. R. Cho, D. Y. Ha. Averaging and finite element discretization approaches in the numerical analysis of functionally graded materials. *Material Science Engineering A302* (2001) 187-196.
- [214] T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. Green's operator for a periodic medium with traction-free boundary conditions and computation of the effective properties of thin plates. *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 6518-6534.
- [215] T. K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet. Hashin-Shtrikman variational principle for heterogeneous plates. *European Journal of Mechanics – A/Solids* 28 (2009) 1051-1063.
- [216] A. M. Zenkour. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1 Deflection and stresses. *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005) 5224–5242.